МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
(ФГАОУ ВО «МГТУ»)



Кафедра математики, информационных систем и программного обеспечения

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

## для самостоятельной работы по дисциплине

## Б1.О.05.03 Математический анализ

Направление подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника
код и наименование направления подготовки /специальности

Направленность (профиль) Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем
наименование направленности (профиля) /специализации

Разработчик: Кацуба Валентина Сергеевна - доцент кафедры математики, информационных систем и программного обеспечения, канд. физ.-мат. наук, доцент
ФИО, должность, ученая степень, (звание)

Мурманск
2020

# Оглавление

# 1 Общая характеристика дисциплины

## 1.1 Учебно-организационная информация

Дисциплина **«Математический анализ»** входит в состав основной профессиональной образовательной программы (ОПОП) по направлению подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, направленности (профилю) «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» и изучается в течение трех семестров. Рабочая программа для изучения дисциплины по указанному направлению подготовки составлена на основе ФГОС ВО 3++, утвержденного приказом Министерством образования и науки РФ от 19.09.2017, №929, и на основе Учебного плана, утверждённого Ученым советом ФГАОУ ВО МГТУ 27.03.2020 г., протокол №8.

**Целью дисциплины** «Математический анализ» (МА) является формирование компетенций в соответствии с ФГОС по направлению подготовки бакалавра и Учебным планом для направления подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника.

**Задачи дисциплины:** изучение теоретических положений в соответствии с Рабочей программой курса и формирование практических навыков и умений использования математического аппарата для решения учебных и прикладных задач.

**Общая трудоемкость** дисциплины определена Учебным планом и составляет 12 зачетных единиц (академических часов - 432). Из них для очной формы обучения запланировано 184 часа на контактную работу (96 часов лекций и 88 часов практических занятий) и 212 часов – на самостоятельную работу обучающихся (в том числе, 36 часов на подготовку к промежуточной аттестации в форме экзамена).

**Контактная работа** - это работа обучающегося во взаимодействии с преподавателем, которая для дисциплины проводится в аудитории по расписанию занятий, а также может проводиться в электронной информационно-образовательной среде.

**Лекция** – это форма организации обучения, направленная на передачу большого объёма систематизированной информации как ориентировочной основы для самостоятельной работы обучающихся.

**Практическое занятие** – это вид учебного занятия, которое проводится под руководством преподавателя и направлено на детализацию, анализ, расширение, закрепление знаний и контроль за усвоением полученной учебной информации (на лекции и в ходе самостоятельной работы).

**Самостоятельная работа** – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (или при частичном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов). Самостоятельная работа студентов является важным видом учебной и научной деятельности студента и играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому самостоятельная работа должна быть эффективной и целенаправленной работой студента, так как играет решающую роль для результативности учебного процесса. В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. Они включают в себя: изучение учебной, научной и методической литературы, материалов периодических изданий с привлечением электронных средств официальной, статистической, периодической и научной информации; подготовку докладов и рефератов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ; участие в работе студенческих конференций, комплексных научных исследованиях.

Основной формой самостоятельной работы студента по дисциплине является составление, изучение и дополнение конспекта лекций, работа с рекомендованной литературой и учебно-методическими ресурсами, выполнение домашних практических заданий, подготовка к следующим аудиторным занятиям и активное участие в них.

В соответствии с ФГОС ВО 3++ по направлению подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов **компетенции ОПК-1: «**Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности». При изучении дисциплины МА эта компетенция реализуется в части «способен применять методы математического анализа и моделирования» формированием теоретических знаний о методах классического математического анализа функций одной переменной и нескольких переменных, применяемых в решении прикладных задач.

## 1.2 Планируемые результаты обучения по дисциплине

Для формирования указанной компетенции в рамках дисциплины МА определены индикаторы по знаниям, умениям и навыкам, в соответствии с которыми строится содержание дисциплины (при этом учитывается также внутренняя логичность в наполнении учебного курса). Ниже приведено содержание каждого индикатора компетенции.

ОПК-1.1. **Знать** теоретические основы математического анализа в части дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной (ФОП), функций нескольких переменных (ФНП) и теории рядов**:**
- определения и свойства основных теоретических понятий, относящихся к ФОП и ФНП (теория пределов, непрерывность, дифференциальное и интегральное исчисления);
- основные теоретические факты и прикладные аспекты для рядов: числовых, степенных и тригонометрических рядов Фурье;
- прикладные аспекты основных теоретических понятий;
- основные способы обоснования математических утверждений;
- основные логические связи между математическими фактами (следствия, равносильность, необходимые или (и) достаточные условия);
- правила выполнения основных операций: вычисление пределов, дифференцирование и интегрирование ФОП и ФНП.

ОПК-1.2. **Уметь** 1) применять методы дифференциального и интегрального исчисления ФОП для решения учебных и практических задач**:**
- исследование основных характеристик функциональной зависимости между двумя переменными, заданной аналитически или графически;

- переведение на математический язык простейших задач, поставленных в терминах других предметных областей;
- выбор теоретических фактов и методов, с помощью которых можно решить актуальную прикладную задачу;
- исследование и (или) интерпретация результата решения задачи, проверка его достоверности или правдоподобности;
2) применять методы дифференциального и интегрального исчисления ФНП и основные положения теории числовых и функциональных рядов к решению следующих учебных и практических задач:
- нахождение частных производных и полного дифференциала ФНП;
- вычисление значений различных интегралов от ФНП;
- определение, интерпретация и исследование основных характеристик скалярных и векторных полей, работа с оператором Гамильтона;
- исследование сходимости / расходимости числовых и функциональных рядов, выполнение операций над рядами;
- представление функций одной переменной разложениями их в степенной ряд или в тригонометрический ряд Фурье и использование этих разложений в работе с функциями;
-математическое моделирование прикладных задач, поставленных в терминах других предметных областей;
- приближенное решение некоторых математических задач с помощью рядов.

ОПК-1.3. **Владеть** основными приемами математического моделирования с использованием ФОП или ФНП, практическими навыками приложения степенных и тригонометрических рядов в задачах аппроксимации функций и исследования их спектральных характеристик, а также следующими навыками**:**

- обобщение ранее полученной учебной информации и её различные интерпретации;

- объяснение и оформление решений задач с полными ссылками на использованные теоретические факты для построения расчетных формул или алгоритмов;

- проверка достоверности или правдоподобности полученного результата решения задачи;
- использование прикладных математических программ и пакетов;
- расширение и углубление математических знаний и умений, в том числе в режиме самообразования.

## 1.3 Структура дисциплины и примерное распределение трудоёмкости

Дисциплина «Математический анализ» состоит из трех частей и включает семь модулей (разделов). **Модуль** – это совокупность частей учебной дисциплины (курса), имеющая определённую логическую завершённость по отношению к целям, задачам и результатам обучения. Ниже в таблице приведены названия модулей и примерное распределение на них запланированной трудоёмкости (без учета количества часов, предусмотренных для подготовки к экзамену).

| Содержание разделов (модулей) дисциплины | Очная | | | | Заочная | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Л | ЛР | ПР | СР | Л | ЛР | ПР | СР |
| М0.Основные структуры элемен- | 12 | - | 6 | 44 | | - | | 40 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| тарной математики. | | | | | | | | |
| М1.Введение в математический анализ. | 20 | - | 22 | 40 | 4 | - | 4 | 44 |
| М2.Пределы и непрерывность функций одной переменной (ФОП). | 12 | - | 12 | 12 | 2 | - | 4 | 44 |
| М3. Дифференциальное исчисление ФОП и его основные приложения. | 10 | - | 8 | 18 | 3 | - | 2 | 61 |
| М4. Интегральное исчисление ФОП и его основные приложения. | 10 | - | 8 | 18 | 3 | - | 2 | 62 |
| М5. Дифференциальное и интегральное исчисления функций нескольких переменных и их приложения. | 16 | - | 16 | 40 | 2 | - | 2 | 64 |
| М6. Числовые и степенные ряды. Ряды Фурье и интеграл Фурье. | 16 | - | 16 | 40 | 4 | - | 4 | 64 |
| **Итого:** | 96 | - | 88 | 212 | 18 | - | 18 | 379 |

## 1.4 Выписка из Рабочей программы о содержании модулей дисциплины

**Модуль 0. Основные структуры элементарной математики**

*Числа* и действия над ними в различных числовых множествах.

*Выражения* и список приемов их преобразования на ОДЗ. Алгебраические и трансцендентные выражения. Целые многочлены: общий вид, признак тождественного равенства, теорема Безу и разложение на множители, выделение полного квадрата в квадратном трехчлене. Рациональные дроби: определение, правильные и неправильные дроби, выделение целой части у неправильной дроби. Определение, геометрическая трактовка и основные свойства модуля. Особенности преобразований тригонометрических и логарифмических выражений.

*Равенства* (тождества и уравнения) и *неравенства*, сравнительный анализ их основных свойств. Равносильность и основные способы ее обеспечить в решениях уравнений или неравенств. Суть аналитического и графического методов решения. Теоретические сведения о простейших уравнениях и неравенствах следующего вида: линейное, квадратное, простейшее иррациональное, простейшее с модулем, простейшие тригонометрические, простейшее показательное и простейшее логарифмическое. Суть метода интервалов для решения неравенств. Примеры решения задач с параметрами.

*Системы* уравнений или (и) неравенств, основные способы выполнить равносильный переход и суть основных методов решения.

Основные *функции* элементарной математики; *последовательности* (геометрическая и арифметическая прогрессии).

*Геометрические объекты* (планиметрия, стереометрия, векторы).

**Модуль 1. Введение в математический анализ**

*Множества*, способы задания, подмножества и их свойства. Основные операции над множествами (объединение, пересечение, разность, дополнение, симметричная разность, прямое произведение, разбиение множества на подмножества) и их основные свойства. Множество действительных чисел (аксиоматическое определение) и его стандартные подмножества. Расширенная числовая прямая, окрестности её точек. Ограниченность числовых множеств, точные верхние и нижние грани. Множества точек на координатной прямой и на координатной плоскости, в том числе в полярной системе координат. Отображение множеств (функция), виды отображений, суперпозиции отображений. Понятие мощности множества. Счетные множества и их основные свойства.

*Функции*: определение с помощью отображения множеств; понятия образа и прообраза. Способы задания числовых функций; явное, неявное и параметрическое задание. График и основные характеристики числовой функции. Обратная функция, условия её существования и процедура нахождения. Классификации функций. Основные элементарные функции и их свойства. Гиперболические функции. Свойства целых многочленов и рациональных дробей.

*Комплексные числа* в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Арифметика комплексных чисел. Множество точек на комплексной плоскости. Свойства целых многочленов и решение простейших алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел.

**Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной**

*Предел числовой последовательности* и его основные свойства. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства. Ограниченные и монотонные последовательности, теорема Вейерштрасса. Определение числа *e*.

*Предел функции*: определения на языке последовательностей (по Гейне), на языке окрестностей (по Коши), записи на языке «$\varepsilon-\delta$ ». Точка сгущения. Предел функции по множеству. Односторонние пределы, их связь с пределом функции. Основные свойства предела. Бесконечно малые, бесконечно большие и локально ограниченные функции, свойства этих функций. Теоремы о конечных пределах. Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых, определение порядка одной бесконечно малой функции относительно другой. Принцип замены эквивалентных бесконечно малых. Неопределенности и способы их раскрытия.

*Непрерывность функции* в точке и на множестве. Точки разрыва, их типы и классификация. Теоремы о функциях, непрерывных в точке. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

**Модуль 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной и его основные приложения**

*Производная функции* в точке: определение, геометрическая и механическая трактовки. Связь свойств непрерывности и дифференцируемости. Правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций. Дифференциал функции: определение, свойства, геометрическая трактовка, применение к вычислению приближенных значений функции и к вычислению погрешностей. Производные и дифференциалы высших порядков. Касательная и нормаль к плоской кривой: определения, составление уравнений. Понятие гладкой функции. Теоремы о дифференцируемых функциях: теорема Ферма, теорема Ролля, теорема Лагранжа, теорема Коши. Формулы Тейлора и Маклорена с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа. Теорема Лопиталя и ее обобщения. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя.

*Исследование функций* и построение графиков. Признаки монотонности дифференцируемой функции. Необходимые условия гладких и острых экстремумов, первое и второе достаточные условия локальных экстремумов. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба графика функции: определения, необходимые и достаточные условия. Асимптоты графика функции: определение и правила нахождения.

*Элементы математического моделирования*: решение текстовых задач на определение наибольшего и/или наименьшего значений некоторых величин, на использование физического смысла первой и второй производных. Простейшие элементы дифференциальной геометрии линий.

**Модуль 4. Интегральное исчисление функций одной переменной и его основные приложения**

*Неопределенный интеграл*. Первообразная и неопределенный интеграл, основные свойства. Таблица интегралов. Методы замена переменной интегрирования и интегрирования по частям. Методы интегрирования рациональных функций, некоторых иррациональных функций, некоторых тригонометрических функций. Понятие о неберущихся интегралах.
*Определенный интеграл*. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определение определенного интеграла Римана, геометрическая и механическая трактовки, основные свойства. Связь определенного интеграла с первообразной подынтегральной функции, теорема Барроу, формула Ньютона-Лейбница. Особенности методов интегрирования по частям и замены переменной в определенном интеграле. Основные геометрические приложения: вычисление площади плоской фигуры в декартовых и в полярных координатах, объема тела вращения, длины дуги плоской кривой. Дифференциал длины дуги. Общая методика приложений определенного интеграла. Примеры решения физических задач с использованием определенного интеграла.
*Несобственные интегралы*. Несобственные интегралы 1 и 2 рода, их определение, свойства и вычисление. Достаточные условия сходимости и расходимости. Понятие о сходимости несобственных интегралов в смысле главного значения.
*Интегралы, зависящие от параметра*: определения, примеры, основные свойства. Гамма-функция, ее основные свойства и график.

**Модуль 5. Дифференциальное и интегральное исчисления функций нескольких переменных и их приложения**

*Тема 1. Дифференциальное исчисление ФНП.*
*Производные и дифференциал функции нескольких переменных* (ФНП). Определение, предел и непрерывность ФНП. Определение частных производных, правило вычисления, геометрическая трактовка. Полное приращение и полный дифференциал, связь между ними. Производные сложных ФНП. Инвариантность формы полного дифференциала. Полная производная. Производные неявных функций. Частные производные высших порядков. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Формула Тейлора для функций двух переменных.
Определение локальных экстремумов функции двух переменных, необходимые и достаточные условия. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой ограниченной области.
*Скалярное поле*: определение, примеры, линии и поверхности уровня. Производная по направлению. Градиент и его основные свойства.

*Тема 2. Интегральное исчисление ФНП.*
*Кратные интегралы*. Двойной интеграл: определение, основные свойства, геометрическая и механическая трактовки, вычисление в декартовых и в полярных координатах, приложения в задачах геометрии и механики. Тройной интеграл: определение, основные свойства, механическая трактовка, вычисление в декартовых координатах. Замена переменных в кратных интегралах. Тройной интеграл в цилиндрических и в сферических координатах. Приложения тройного интеграла.
*Криволинейные и поверхностные интегралы*. Криволинейный интеграл по координатам: определение, основные свойства, физическая трактовка, вычисление, формула Грина, независимость от формы линии интегрирования. Восстановление ФНП по ее полному дифференциалу. Криво-

линейный интеграл по длине дуги: определение, основные свойства, вычисление, механическая трактовка, приложения. Интегралы по поверхности: определения, основные свойства, вычисления, некоторые приложения.
*Элементы теории векторных полей*. Определение векторного поля, примеры. Векторные линии. Поток через поверхность. Дивергенция, ее вычисление и основные свойства. Формула Остроградского-Гаусса. Работа и циркуляция. Дифференциальный векторный оператор Гамильтона. Векторные дифференциальные операции второго порядка. Ротор, его вычисление и основные свойства. Формула Стокса. Потенциальные, соленоидальные и гармонические поля. Нахождение потенциала потенциального векторного поля.
**Модуль 6. Числовые и степенные ряды. Ряды Фурье и интеграл Фурье**

*Тема 1. Числовые и степенные ряды*
*Числовые ряды*. Определения числового ряда, его частичной суммы, сходимости и расходимости, частичного остатка. Основные свойства рядов. Необходимый признак сходимости. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов (признаки сравнения, Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши), знакопеременных и знакочередующихся рядов (признак абсолютной сходимости и признак Лейбница). Абсолютно и условно сходящиеся ряды, их основные свойства. Оценки остатков рядов.
*Степенные ряды*. Функциональные ряды, область сходимости и область расходимости, равномерная сходимость, свойства равномерно сходящихся рядов, теорема Вейерштрасса. Степенные ряды, теорема Абеля, радиус сходимости, основные свойства. Ряды Тейлора и Маклорена, остаточный член в форме Лагранжа. Разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций. Приложения рядов к вычислению значений функции, определенных интегралов.

*Тема 2. Элементы гармонического анализа: ряды Фурье и интеграл Фурье*
*Тригонометрические ряды Фурье*. Гармоники, свойства гармоник. Ряды Фурье для функций с периодом $2\pi$. Сходимость ряда Фурье, теорема Дирихле. Ряды Фурье для четных и нечетных функций, для функций с произвольным периодом. Периодические продолжения функций. Ряд Фурье в комплексной форме. Понятие о дискретных спектрах периодической функции.
*Интеграл Фурье*. Вывод представления непериодической функции интегралом Фурье. Косинус-преобразование и синус-преобразование Фурье. Интеграл Фурье в комплексной форме. Комплексное преобразование Фурье. Понятие о непрерывных спектрах непериодической функции.

## 1.5 Список учебной литературы, рекомендуемой к изучению дисциплины

***Основная литература***

1. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие для вузов. В 2 т. Т. 1 / Н. С. Пискунов. - Изд. стер. - Москва: Интеграл-Пресс, 2005, 2001. - 416 с. *(аб. 170, кх. 53, чз. 1).*
2. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие для вузов. В 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. - Изд. стер. - Москва: Интеграл-Пресс, 2005, 2001. - 544 с. *(аб. 75, кх. 117, чз. 1).*
3. Никольский, С. М. Курс математического анализа: учеб. для вузов / С. М. Никольский; Техн. ун-т. - 6-е изд., стер. ; 5-е изд., перераб. - Москва: Физматлит, 2001, 2000. - 592 с. *(аб. 47, чз. 2)*.
4. Бермант, А. Ф. Краткий курс математического анализа для втузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. - 9-е изд. - Москва: Физматлит, 2002. - 800 с. *(аб. 3, чз. 1+ предыдущие издания).*
5. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие / Г. Н. Берман. - [22-е изд., перераб.]. - Санкт-Петербург: Профессия, 2005, 2004, 2002, 2003,

2001. - 432 с. *(аб. 779, чз. 1+ предыдущие издания).*

***Дополнительная литература***

1. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа. В 3 т. Т. 1: учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : Высш. шк., 1988. - 712 с. *(аб. 4, чз.1 + предыдущее издание).*
2. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа. В 2 т. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ: учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев. - 3-е изд., перераб. - Москва: Физматлит, 2002. - 424 с. *(аб. 1, чз. 1).*
3. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учеб. пособие для вузов. В 3 т. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. - Санкт-Петербург: Лань, 1997. – 607с. *(аб. 4, чз.1).*
4. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учеб. пособие для вузов. В 3 т. Т. 2 / Г. М. Фихтенгольц. - 7-е изд., стер. - Москва: Наука, 1962, 1970. - 800 с. *(аб. 6).*
5. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 16-е изд.; 15-е изд. - Москва: Айрис-пресс, 2018, 2017. – 279 с. *(аб. 10, + предыдущие издания).*
6. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 14-е изд.; 15-е изд. - Москва : Айрис Пресс, 2018, 2015. - 602 с. *(аб. 6, чз. 1+ предыдущие издания).*
7. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. - 6-е изд. - Москва: Оникс 21 век : Мир и Образование, [2007], 2006, 2005, 2003. - 303с. *(аб. 18, чз. 1+ предыдущие издания).*
8. Данко П.Б., Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие / П. Е. Данко [и др.]. - 7-е изд., испр. - Москва: Оникс : Мир и Образование, [2008]. - 815 с. *(аб. 29, чз. 1+ предыдущие издания).*
9. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. - 13-е изд., стер. - Москва: Физматлит, 1995. - 872 с. *(аб.16).*
10. Выгодский, М.Я. Справочник по элементарной математике / М. Я. Выгодский. - 27-е изд., испр. - Москва: Наука, 1986. - 317 с. *(аб. 2, кх. 22, нф. 2, чз.1 + последующие и предыдущие издания).*

### 1.6 Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины

1. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Математический анализ» для студентов 1-го курса направления подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника».

2.Методические указания к выполнению расчетно-графической работы «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной» для студентов 1-го курса направления подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» очной формы обучения.

3. Методические указания к выполнению расчетно-графической работы «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций нескольких переменных» для студентов 2-го курса направления подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника очной формы обучения.

4.Методические указания к выполнению контрольных работ по дисциплине «Математический анализ» для студентов направления подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» заочной формы обучения.

5. Методические указания к выполнению расчетно-графической работы по дисциплине «Математического анализа» для студентов 2-го курса направления подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» заочной формы обучения.

6. Методическая разработка к выполнению заданий по теме «Элементы гармонического анализа: ряды Фурье и интеграл Фурье».

7. Конспекты лекций в электронном виде по всем модулям дисциплины.

8. Компьютерная обучающая программа «Исследование функций и построение графиков».

9. Нулевые варианты с ответами к контрольным работам и ко всем интерактивным самостоятельным работам в аудитории для студентов очной формы обучения.

10. Презентации к лекциям «Исследование свойств ФОП и построение графиков», «Геометрические приложения определённого интеграла», «Определения интегралов от ФНП».

# 2 Модуль 0. Основные структуры элементарной математики

## 2.1 Описание теоретической части модуля

Работа в этом модуле имеет следующие цели:

- обобщить, систематизировать и расширить информацию по элементарной математике, представляя её в сжатой форме, удобной для использования в дальнейшем обучении;
- скорректировать и по возможности выровнять начальную подготовку первокурсников по элементарной математике;
- сформировать у первокурсников необходимые учебно-организационные навыки.

С целью определения рамок повторения и расширения тем, изученных в школьном курсе математики (профильный уровень), ниже приводится список параграфов модуля, в котором после названия каждого параграфа даётся его подробное содержание. С целью повторения и актуализации знаний и умений, а также систематизации необходимой информации учащимся рекомендуется при работе над теоретическим материалом составлять свой краткий и структурированный конспект, включающий сжатую и (или) формальную запись основных фактов и вычислительных алгоритмов. В основном эти факты и алгоритмы известны из школьной математики, но некоторые из них могут быть забыты или не были изучены ранее – в этих случаях является обязательным их конспектирование и тщательная проработка.

Некоторая часть описанного ниже теоретического материала должна быть разобрана в аудитории с преподавателем, чтобы стали понятными целевые принципы обобщения, систематизации и сжатия известного материала. Большую часть указанных параграфов студентам предлагается проработать и законспектировать самостоятельно.

§1. *Преобразования алгебраических выражений.*

Определение математической структуры «выражение». Основные типы выражений: арифметические выражения, выражения с буквенными величинами (одночлены, подобные одночлены, многочлены).

Целые многочлены (полиномы): общий вид и основные свойства (тождественное равенство, разложение на множители).

Алгебраические (рациональные) дроби: определение, правильные или неправильные дроби, выделение целой части у неправильной дроби.

Область допустимых значений (ОДЗ) для буквенных величин, входящих в выражение.

Алгебраические и трансцендентные (неалгебраические) выражения.

Основная задача для выражений: преобразовать выражение к заданному виду (в частности, упростить) с учетом ОДЗ.

Основные приёмы преобразования алгебраических выражений:

- использование правил арифметических действий;
- прием группировки слагаемых и вынесение общего множителя;
- использование формул сокращенного умножения;
- правила сложения и умножения многочленов;
- правила работы со степенями и корнями;
- уничтожение иррациональностей;
- преобразование выражений с модулями; основные свойства модуля;
- разложение целого многочлена на множители; теорема Безу, подбор нулей;
- другие приемы: замена переменных, преобразования квадрата или куба выражения; работа с однородными выражениями.

§2. *Решение алгебраических уравнений.*

Определение математической структуры «равенство». Основные типы равенств: арифметические равенства, равенства с буквенными величинами, тождества и уравнения.

Уравнения относительно одной неизвестной: общий вид, определение корня (решения) уравнения, определение понятия «решить уравнение», равносильные уравнения.

Алгебраические и трансцендентные уравнения.

Два основных метода решения любых уравнений: аналитический и графический, их суть.

Основные способы выполнить равносильный переход в равенствах:

- выполнить тождественные преобразования выражений в левой или (и) в правой части равенства;
- использовать свойства равенств;
- сделать замену переменных.

Список основных свойств равенств.

Теоретическое решение простейших алгебраических уравнений: линейных, квадратных, иррациональных, с модулями, целых алгебраических уравнений $n$-ой степени.

Уравнения, содержащие параметры. Примеры решения алгебраических уравнений с параметрами.

§3. *Решение алгебраических неравенств.*

Определение математической структуры «неравенство». Основные типы неравенств: арифметические неравенства, неравенства с буквенными величинами (одной или двумя).

Неравенства относительно одной неизвестной: общий вид, определение решения неравенства, определение понятия «решить неравенство», равносильные неравенства.

Алгебраические и трансцендентные неравенства.

Три основных метода решения любых неравенств: аналитический метод, графический метод и метод интервалов; суть каждого из этих методов.

Основные способы выполнить равносильный переход в неравенствах:

- выполнить тождественные преобразования выражений в левой или (и) в правой части неравенства;
- использовать свойства неравенств;
- сделать замену переменных.

Список основных свойств неравенств (в сравнении с аналогичными свойствами равенств).

Теоретическое решение простейших алгебраических неравенств: линейных, квадратных, иррациональных, с модулями.

Неравенства, содержащие параметры. Примеры решения алгебраических неравенств с параметрами.

§4. *Системы алгебраических уравнений или (и) неравенств.*

Определение математической структуры «система равенств или (и) неравенств».

Определение решения системы и понятия «решить систему».

Системы $m$ уравнений относительно $n$ неизвестных: определённые (замкнутые) системы, недоопределённые (незамкнутые) системы, переопределённые системы, совместные или несовместные системы.

Геометрическая трактовка уравнений и систем уравнений относительно двух неизвестных.

Равносильные системы. Основные действия над системами, которые гарантированно приводят к системе, равносильной данной.

Основные методы решения любых систем уравнений:

- метод исключения неизвестных, который осуществляется способом подстановки или способом алгебраического сложения уравнений;
- замена неизвестных (полная или частичная);
- графический метод.

Некоторые приёмы решения систем нелинейных уравнений:

- исключение одной неизвестной в простейшем случае, когда в системе есть линейное уравнение;
- преобразование системы с целью получить линейное уравнение;
- введение вспомогательной неизвестной (частичная замена неизвестных);
- полная замена неизвестных;
- решение симметричных систем;
- использование однородного уравнения в системе;
- графическое решение (например, с целью определить количество решений системы).

Примеры решения алгебраических систем неравенств, систем уравнений и неравенств.

Примеры решения систем с параметрами.

Способы графического решения задач с параметрами: в осях $xOy$ или в осях «неизвестная-параметр».

§5. *Тригонометрические структуры: выражения, уравнения, неравенства.*

Определение тригонометрических функций острого угла (в прямоугольном треугольнике).

Определение тригонометрических функций любого угла (на тригонометрическом круге).

Радианная мера углов: определение, интерпретация и связь с градусной мерой.

Малая таблица значений тригонометрических функций основных углов.
Формулы приведения.
Свойства чётности/нечетности и периодичности тригонометрических функций.
Основные соотношения между тригонометрическими функциями:

– для тригонометрических функций одинаковых углов;
– для тригонометрических функций углов кратности 2;
– для тригонометрических функций углов, которые являются существенно разными.

Решение простейших тригонометрических уравнений: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ - (с помощью тригонометрического круга, использованием известных формул, с помощью графиков тригонометрических функций).

Решение простейших тригонометрических неравенств (с помощью тригонометрического круга или/и с помощью графиков тригонометрических функций).

Примеры решения основных задач тригонометрии: преобразование тригонометрических выражений, решение тригонометрических уравнений, неравенств и систем.

§6. *Показательные и логарифмические структуры: выражения, уравнения, неравенства.*

Определения логарифма числа по некоторому основанию, ОДЗ для буквенных величин в этом определении.
Основные свойства логарифмов (формальная запись с пониманием границ применимости).
Показательная и логарифмическая функции: определения, графики, основные свойства.
Теоретические решения простейших показательных и логарифмических уравнений.
Теоретические решения простейших показательных и логарифмических неравенств.
Примеры решения трансцендентных уравнений или неравенств с параметрами.

§7. *Последовательности, арифметическая и геометрическая прогрессии.*

Определение последовательности, её общего члена; примеры.
Определение арифметической прогрессии, формулы для её общего члена и суммы нескольких первых членов; внутреннее свойство членов арифметической прогрессии; примеры.
Определение геометрической прогрессии, формулы для её общего члена и суммы нескольких первых членов; внутреннее свойство членов геометрической прогрессии; примеры.
Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия: определение, формула для суммы всех её членов.

§8. *Свойства геометрических объектов: планиметрия.*

Окружности:

– геометрическое определение окружности, названия элементов;
– измерение центральных и вписанных углов;
– формулы для вычисления длины окружности и площади круга;
– касательная к окружности: определение, основные свойства.

Треугольники:

– определение треугольника и его элементов;
– свойства сторон и углов, свойство медиан, свойство средней линии;
– формулы для вычисления площади;
– признаки равенства и признаки подобия треугольников;
– свойства сторон, углов и площади в подобных треугольниках;
– теорема косинусов и теорема синусов;
– нахождение центра и радиуса вписанной и описанной окружностей;

– равнобедренные треугольники и их особые свойства;
– равносторонние (правильные) треугольники и их особые свойства;
– прямоугольные треугольники и их особые свойства.

Четырёхугольники:

– определение, названия элементов, выпуклые четырехугольники;
– нахождение площади любого выпуклого четырёхугольника через его диагонали;
– признаки четырёхугольников, для которых существует вписанная или описанная окружности;
– трапеции: определение, свойство углов,свойство средней линии, вычисление площади;
– параллелограммы: определение, признаки, свойство углов, свойство диагоналей, формулы для вычисления площади;
– прямоугольник как частный случай параллелограмма: признак, дополнительные свойства;
– ромб как частный случай параллелограмма: признак, дополнительные свойства;
– квадрат (правильный четырёхугольник): признаки и свойства.

Многоугольники ($n$-угольники) выпуклые:

– сумма углов и количество диагоналей;
– правильные многоугольники и их особые свойства (например, для $n$=3, $n$=4, $n$=6).

§9. *Свойства геометрических объектов: стереометрия.*

Простейшие геометрические объекты в пространстве и их взаимное расположение:

– прямая, параллельная плоскости (определение и признак);
– прямая, перпендикулярная плоскости (определение и признак);
– угол между прямой и плоскостью;
– двугранный угол и его измерение;
– угол между двумя плоскостями;
– взаимно перпендикулярные две плоскости (определение и признак);
– скрещивающиеся две прямые, угол и расстояние между ними.

Многогранник «призма»:

– определение призмы, название её элементов, параллелепипед;
– наклонная, прямая и правильная призма;
– формулы для вычисления объёма призмы и площади её поверхности.

Многогранник «пирамида»:

– определение пирамиды, названия её элементов, тетраэдр;
– формулы для вычисления объёма пирамиды и площади её поверхности;
– правильная пирамида: определение, особая формула для вычисления площади боковой поверхности.

Тела вращения:

– определения цилиндра, конуса, сферы и усеченного конуса, их основных элементов;
– формулы для вычисления объёма и площади боковой и полной поверхности каждого из указанных тел вращения.

§10. *Свойства геометрических объектов: векторы.*

Геометрическое определение вектора и его элементов (начало, конец, длина, ноль-вектор).

Коллинеарные или компланарные векторы, противоположный вектор, орт вектора.

Определение и основные свойства действий над векторами: сложение (вычитание), умножение вектора на скаляр, скалярное произведение двух векторов, прямоугольное проектирование вектора на направленную ось, формула для вычисления проекции вектора на ось.

Алгебраическое задание вектора через его проекции на оси декартовой прямоугольной системы координат, основная формула векторного исчисления.

Построение вектора в системе координат по его проекциям на оси координат, вычисление длины.

Радиус-вектор точки, связь его проекций на оси координат с координатами точки.

Вычисление проекций вектора на оси координат через координаты точек его начала и конца.

Формулы, по которым выполняются действия над векторами, заданными в алгебраической форме (сложение-вычитание, умножение на скаляр, скалярное произведение).

§11. *Элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве.*

Взаимно однозначное соответствие между геометрическими объектами (точками, линиями, областями) и их аналитическим описанием (числами, уравнениями, неравенствами) в декартовой прямоугольной системе координат.

Уравнения прямой на плоскости: уравнение прямой с угловым коэффициентом (геометрический смысл его параметров), уравнение вертикальной прямой, общее уравнение прямой. Признаки взаимного расположения двух прямых, определяемые по их уравнениям с угловыми коэффициентами; признаки параллельности и перпендикулярности двух прямых; нахождение угла между прямыми; угол наклона прямой к оси абсцисс (определение и нахождение значения).

Составление уравнения прямой по двум её точкам или по одной точке и угловому коэффициенту.

Уравнения окружности с центром в начале координат или со смещённым центром.

Уравнения параболы с вершиной в начале координат или со смещённой вершиной.

Координаты точек в пространстве, построение точек по их координатам; вычисление расстояния между двумя точками, деление отрезка в заданном отношении, координаты средины отрезка.

Общее уравнение плоскости, нормальный вектор плоскости и его проекции на оси координат; составление уравнения плоскости по координатам трёх её точек или по координатам одной её точки и проекциям нормального вектора.

Уравнения прямой линии в пространстве: по точке и направляющему вектору, по двум точкам.

Нахождение координат точки пересечения прямой и плоскости.

## 2.2 Описание практической части модуля, формы контроля

В результате работы первокурсников над модулем «Основные структуры элементарной математики» нужно повторить и уверенно осуществлять следующие практические умения и навыки:

- рационально выполнять любые арифметические операции на множестве действительных чисел (вручную и/или с помощью калькулятора, других вычислительных средств);
- упрощать алгебраические и трансцендентные выражения или проводить их преобразование к наперёд заданной форме (выделение полного квадрата, уничтожение иррациональности, выделение целой части у алгебраической дроби, представление в виде произведения и др.);

- проводить решение уравнения, неравенства или системы аналитически, строго выполняя равносильные переходы; проводить проверку результатов на достоверность или правдоподобность;
- работать с уравнениями, неравенствами или системами графически, в том числе используя графопостроители;
- выделять в текстовых задачах этапы построения математической модели, её формулирования, решения и интерпретации результатов;
- решать несложные геометрические задачи, в том числе координатным методом;
- проводить решение и исследование несложных задач, содержащих параметры.

Для повторения и совершенствования практических умений и навыков студентам следует тщательно разбирать примеры, приведенные в учебно-методических разработках преподавателя по основным параграфам модуля, вдумчиво выполнять упражнения для самостоятельной работы из этих предоставляемых разработок, активно участвовать в аудиторных практических занятиях, обращаться с вопросами к товарищам по группе или (и) к преподавателю в режиме индивидуальных консультаций. При необходимости рекомендуется использовать внешние пособия, практикумы и любые другие учебные ресурсы по элементарной математике.

Обратная связь по практической части модуля проводится, прежде всего, с целью диагностики и выравнивания начальной математической подготовки первокурсников, а также их адаптации к организационно-учебному регламенту, системе экспертизы и оценивания запланированных контрольных точек. Поэтому в данном модуле обратная связь реализуется начальным тестированием и выполнением в интерактивном аудиторном режиме только двух самостоятельных работ: первая – по алгебраическим структурам и вторая – по трансцендентным структурам (выражениям, уравнениям, неравенствам, системам). Ниже приведены примерные варианты этих самостоятельных работ.

*Самостоятельная работа №1 «Алгебраические структуры (выражения, уравнения, неравенства, системы)»*

1. Выделите полные квадраты в следующих выражениях:

1) $2x^2+10x+11$; 2) $3+4x-2x^2$; 3) 3) $x^2-3x+y^2+6y-1$.

2. Выделите целую часть в каждой из данных алгебраических дробей:

1) $\dfrac{x^3-4x^2+2x-1}{x-2}$ ; 2) $\dfrac{x^4+1}{x^2-3x-4}$ .

3. Проведите уничтожение иррациональности в знаменателе каждой дроби:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}-2}$; 2) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}+3}$; 3) $\dfrac{8}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3}}$.

4. Решите следующие уравнения относительно неизвестной $x$:

1) $|x-2|+|x-3|=|x|$; 2) $x^2+8|x|-9=0$; 3) $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$.

5. Решите следующие неравенства относительно переменной $x$:

1) $\dfrac{(x-3)(x^2-1)}{|x|(x+5)}\geq 0$; 2) $|2x-7|<5$; 3) $\sqrt{x^2-2x}<3$.

6. Найдите четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой третий

член больше первого на 9, а второй больше четвёртого на 18.

*Ответы к заданиям  примерного варианта самостоятельной работы №1*

**1.** 1) $2(x+2{,}5)^2-1{,}5$; 2) $5-2(x-1)^2$; 3) $(x-1{,}5)^2+(y+3)^2-12{,}25$

**2.** 1) $x^2-2x-2-\dfrac{5}{x-2}$; 2) $x^2+3x+13+\dfrac{51x+53}{x^2-3x-4}$.

**3.** 1) $\dfrac{\sqrt{x+3}+2}{x-1}$; 2) $\dfrac{2\cdot(\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+9)}{x+27}$; 3) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}$.

**4.** 1) $\{\frac{5}{3};\ 5\}$; 2) $\{-1;\ 1\}$; 3) $\{1;\ 3\}$.

**5.** 1) $x\in(-\infty;-5)\cup[-1;\ 0)\cup(0;\ 1]\cup[3;+\infty)$; 2) $x\in(1;\ 6)$;

3) $x\in(1-\sqrt{10};\ 0]\cup[2;\ 1+\sqrt{10})$.

**6.** 3; -6; 12; -24.

*Самостоятельная работа №2 «Трансцендентные структуры (выражения, уравнения, неравенства)»*

1. Вычислите значение каждого из следующих выражений:

1) $-100\cos 4x$, если $ctgx=0,5$; 2) $\frac{4}{3}tg\left(\pi-\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$;

3) $49^{0,5\log_7 10}:49^{\left(\log_8 49\right)^{-1}}$; 4) $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[8]{2}}$.

2. Решите следующие уравнения относительно неизвестной $x$:

1) $\cos^2 x-2\cos x=3,\ x\in(-\pi;3\pi)$; 2) $\dfrac{1+\cos 2x}{2\cos x}=\dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$;

3) $4^{4x-2}-4^{2x-1}=12$; 4) $\log_9 x^2+\log_3(x-1)=\log_3\log_{\sqrt{5}}5$;

5) $\lg(0,5+x)=\lg 0,5-\lg x$; 6) $2\lg\lg x=\lg(7-2\lg x)-\lg 5$.

3. Решите следующие неравенства относительно переменной $x$:

1) $\log_2(x+14)\ge\log_2(x^2+2)$; 2) $4^{-x+0,5}-7\cdot 2^{-x}-4<0$;

3) $\log_{0,5}^2 x+\log_{0,5}(0,5x)-3\le 0$; 4) $\cos^2 2x>\frac{1}{4}$; 5) $|\mathrm{ctg}\,x|\le 1$.

*Ответы к заданиям  примерного  варианта самостоятельной работы №2*

**1.** 1) 28; 2) 1; 3) 1,25; 4) 4.

**2.** 1) $\pi$; 2) $\varnothing$; 3) 1; 4) 2; 5) 0,5; 6) 10.

**3.** 1) $x\in[-3;4]$ 2) $x\in(-2;+\infty)$ 3) $x\in[0,5;4]$;

4) $x\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{2};\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{2}\right)$; 5) $x\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left[\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\dfrac{3\pi}{4}+\pi k\right]$.

# 3 Модуль 1. Введение в математический анализ

## 3.1 Описание теоретической части модуля

Модуль «Введение в математический анализ» является традиционным для набора математических дисциплин во многих технических направлениях профессиональной подготовки. Для обучающихся по направлению 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», в рамках которого требуется усиленная математическая подготовка, работа в этом модуле продолжает корректировку и выравнивание начальной подготовки первокурсников, но на базе нового материала (в отличие от нулевого модуля дисциплины). Модуль включает информацию, расширяющую необходимые знания студентов по следующим трём темам: множества, числовые функции одного числового аргумента, множество комплексных чисел и решение на нём целых алгебраических уравнений. В этом модуле осваивается удобная общепринятая математическая символика и её использование для формального описания определений, свойств, теорем (другими словами можно сказать, что осваивается язык математического анализа).

С целью знакомства с учебно-методическим обеспечением дисциплин и рамочного фиксирования содержания модуля студентам представляется полный электронный конспект по всем темам модуля, включающий теоретический материал с иллюстрирующими его примерами, упражнения для самостоятельной работы, глоссарий терминов и вопросы для самопроверки. Запланированной контрольной точкой по теоретической части модуля является коллоквиум.

Ниже приводится список параграфов по указанным темам, в котором после названия каждого параграфа даётся его краткое содержание. С этим списком рекомендуется обучающимся особенно работать на этапе саморефлексии относительно выученного материала.

§1. *Множества: определения, способы задания, основные операции.*

Список основных математических обозначений.

Способы задания множеств. Равные множества, конечные или бесконечные множества.

Подмножества: определение и основные свойства.

Основные операции над множествами: объединение, пересечение, разность, симметричная разность, дополнение, декартово произведение, разбиение множества на подмножества. Определения этих операций и их основные свойства (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, особые случаи; законы двойственности).

§2. *Множество действительных чисел: определение, геометрическая интерпретация, модуль, стандартные подмножества.*

Аксиоматическое определение множества действительных чисел.

Модуль действительного числа: определение, геометрическая трактовка, основные свойства.

Стандартные подмножества множества действительных чисел (множества натуральных, целых, рациональных и иррациональных чисел); арифметические операции, всегда выполнимые на каждом из стандартных подмножеств, понятие о множестве комплексных чисел.

Признак рационального или иррационального числа по его представлению десятичной дробью.

Дискретные или непрерывные числовые множества.

§3. *Расширенная числовая прямая. Промежутки. Окрестности точек.*

Расширение множества действительных чисел добавлением элементов $+\infty$, $-\infty$, $\infty$ (бесконечно удалённых точек).

Промежутки расширенной числовой прямой (отрезок, интервал, полуотрезок/полуинтервал).

Длина (мера) конечного промежутка

Определение окрестности и ε-окрестности конечной точки числовой прямой.

Определение ε-окрестности каждой из бесконечно удалённых точек.

Понятие проколотой окрестности.

Основные свойства окрестностей.

Система вложенных отрезков: определение, свойство о непустом пересечении, свойство о единственной общей точке системы вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю.

§4. *Ограниченность числовых множеств. Определения точной верхней и точной нижней граней множества, теорема об их существовании.*

Определения числового множества, ограниченного сверху, ограниченного снизу, ограниченного, неограниченного; формальная запись этих определений.

Определения точной верхней грани и точной нижней грани множества (описательное и формализованное); примеры.

Теорема о существовании точных граней ограниченного множества (формулировка и доказательство).

Символическое обозначение точных граней неограниченного множества (сверху или/и снизу).

Определение экстремумов множества как его точных граней в случае, когда они принадлежат множеству.

§5. *Отображения множеств. Типы отображений, обратное отображение, суперпозиция отображений.*

Определение отображения множеств.

Универсальное определение функции как отображения множеств. Некоторые типы функций (числовая функция, числовая функция числового аргумента, функционал).

Множество задания отображения (функции), множество значений отображения (функции), различие между понятиями «отображение множества в множество» и «отображение множества на множество».

Определения основных типов отображений: сюръекция, инъекция и биекция; примеры.

Образ и прообраз множества при заданном отображениях: определения, примеры.

Понятие многозначного отображения и сведение его к совокупности однозначных отображений.

Понятие об обратном отображении, примеры. Взаимно обратные отображения (функции).

Суперпозиция отображений (сложная функция): определение, примеры.

§6. *Сравнение множеств. Счётные множества.*

Определение взаимно однозначного отображения множеств.

Понятие мощности множества: определение равномощных множеств (эквивалентных по мощности), примеры равномощных множеств (конечных или бесконечных).

Счетные множества: определение, примеры. Основные свойства счетных множеств.

Доказательство несчетности множества точек интервала (0;1).

Несчетность множества действительных чисел. Понятие о мощности «континуум».

§7. *Числовая функция числового аргумента: определение, способы задания, график.*

Определение числовой функции одного числового аргумента (далее просто функция).

Область определения и область значений функции (ООФ и ОЗФ), примеры.

Понятие о сужении функции или о расширении функции, примеры.

Основные способы задания функции : аналитический, табличный, графический, описательный. Примеры; функции «целая часть числа» и «дробная часть числа».

Варианты аналитического способа задания функции: явное задание, неявное задание параметрическое задание (его механическая трактовка). Примеры; параметрическое задание некоторых линий (окружность, эллипс, циклоида, астроида).

График функции: определение, зависимость формы от выбранной системы координат. Примеры графиков в полярной системе координат (спираль Архимеда, кардиоида, $n$-лепестковая роза). Кусочно-заданная функция и построение её графика.

§8. *Основные характеристики числовой функции числового аргумента.*

Область определения и область значений: естественные и по смыслу функции (смысловые).

Нули функции и множества значений аргумента, на которых функция является знакопостоянной: определения, обозначения формальные описания, примеры нахождения.

Свойство четности функции: определения четной функции, нечетной функции, функции, которая не является ни четной, ни нечетной (т.е. свойством четности не обладает). Особенности графиков функций, обладающих свойством четности. Примеры.

Периодичность функции: определение, примеры, основные свойства периодической функции.

Свойство монотонности функции: определения монотонно возрастающей или монотонно убывающей функции на интервале, монотонной функции на интервале; формальная запись свойства и его определение по графику функций. Понятие о строгой или нестрогой монотонности.

Локальные экстремумы функции: определения точки локального максимума или локального минимума, локального максимума или локального минимума функции; формальная запись определений и их «чтение» по графику функции; понятие о строгих или нестрогих экстремумах.

Глобальные экстремумы функции на некотором множестве (наибольшее и наименьшее значения функции на множестве): определения глобального максимума и глобального минимума, формальная запись определений, «чтение» по графику функции.

Свойство ограниченности функции: определение ограниченной функции, точных граней функции через ограниченность и точные грани множества её значений; формальная запись свойства; «чтение» свойства по графику функции.

§9. *Обратная функция: определение, условие существования, график.*

Определение и примеры нахождения обратной функции как обратного отображения множеств.

Биективность отображения как необходимое и достаточное условие для существования обратного отображения.

Взаимно обратные функции в традиционных обозначениях аргумента и функции, особенности их графиков, ООФ и ОЗФ.

Примеры построения графика суперпозиции взаимно обратных функций.

Алгоритм решения задачи на нахождение функции, обратной данной функции.

§10. *Классификации функций. Рациональные дроби.*

Классификация явно заданных функций, основой для которой является вид и количество операций в аналитической формуле, связывающей аргумент и функцию:

- основные элементарные функции,
- элементарные функции,
- неэлементарные функции.

Классификация функций, имеющих аналитическое задание (явное или неявное), по типу выражений в формуле, связывающей аргумент и функцию:

- алгебраические функции,
- трансцендентные (неалгебраические) функции.

Графики и свойства основных алгебраических функций: линейной, квадратичной, обратной пропорциональности, дробно-линейной.

Свойство правильных рациональных дробей о разложении их на сумму простейших дробей

§11. *Основные элементарные функции, их определения и графики.*

Список функций, которые относятся к основным элементарным.

Степенная функция с любым действительным показателем.

Показательная функция; частный случай – экспонента, особенность её графика.

Логарифмическая функция; частный случай – натуральный логарифм, особенность его графика.

Простейшие тригонометрические функции.

Обратные тригонометрические функции.

Гиперболические функции. Основное тождество для гиперболических функций.

§12. *Комплексные числа: определения, геометрическая интерпретация, арифметические действия в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.*

Определения понятий: мнимая единица, комплексное число и его действительная часть и мнимая часть; комплексный ноль, комплексно сопряжённые числа, противоположные числа; действительное число как частный случай комплексного числа; чисто мнимое число.

Комплексная плоскость и геометрическая интерпретация на ней комплексных чисел.

Модуль и аргумент комплексного числа: определения и геометрическая интерпретация, формулы для вычисления значений, главное значение аргумента. Основные свойства модуля и аргумента.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа, её связь с алгебраической формой.

Показательная форма записи комплексного числа, её связь с тригонометрической формой.

Формулы Эйлера.

Арифметические операции над комплексными числами:

- сложение, вычитание, умножение, деление в алгебраической форме, алгоритмы их выполнения и основные свойства;
- выполнение операций умножения, деления и возведения в натуральную степень в тригонометрической форме; формула Муавра;
- определение корня натуральной степени из комплексного числа, теорема о его значениях, геометрическая интерпретация значений.

Выполнение арифметических операций над комплексными числами в показательной форме.

§13. *Целые алгебраические функции (многочлены) и их основные свойства. Решение целых алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел.*

Общий (канонический) вид целой алгебраической функции (многочлена) степени $n$ относительно переменной $x$, названия и возможные значения параметров функции.

Определение алгебраического уравнения степени $n$ относительно неизвестной $x$.

Основные свойства целых многочленов:

- о тождественном равенстве двух многочленов;
- о делении многочлена на разность переменной и некоторого числа;
- о делении без остатка многочлена на разность переменной и некоторого числа (теорема Безу);
- о нулях многочлена (основная теорема алгебры);
- о разложении многочлена на линейные множители;
- о разложении многочлена с действительными коэффициентами на линейные и квадратичные множители, имеющие только действительные коэффициенты.

Основные свойства корней алгебраического уравнения:

- теорема о количестве корней; определение кратного или простого корня;
- о комплексных корнях алгебраического уравнения с действительными коэффициентами;
- о целых и рациональных корнях алгебраического уравнения с действительными коэффициентами.

Теоретические решения простейших алгебраических уравнений:

- решение уравнений первой степени (всегда имеет единственный корень);
- решение квадратных уравнений (всегда имеют два простых корня или один корень кратности два); теорема Виета; приёмы извлечения корня квадратного из дискриминанта;
- решение двучленных уравнений $n$ –ой степени (в общем случае имеют $n$ простых корней).

## 3.2 Описание практической части модуля, формы контроля

В практической части модуля «Введение в математический анализ» формируются необходимые умения и навыки по следующим заданиям или фрагментам в решении задач:

- нахождение всех элементов множества по аналитическому или геометрическому описанию характеристического свойства его элементов;
- построение множества точек плоскости, описание которого дано в декартовой прямоугольной системе координат или в полярной системе координат;
- определение основных характеристик числовых множеств: дискретное или непрерывное, конечное или бесконечное, ограниченное или неограниченное, точные грани и экстремумы множества, мощность множества;
- выполнение основных операций над множествами элементов любой природы;
- выполнение операций над множествами точек координатной прямой или координатной плоскости;
- описание и использование свойств и графиков основных элементарных функций;
- использование графиков основных элементарных функций с учетом простейших преобразований графиков и суперпозиции функций;
- нахождение образа или прообраза некоторого множества при отображении указанной функцией;
- выполнение арифметических операций над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической или показательной форме;
- построение множества точек на комплексной плоскости;
- использование свойств целых многочленов на множестве комплексных чисел;
- решение целых алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел (квадратных, биквадратных, двучленных и др.).

Для уверенного овладения этими умениями и навыками обучающимся следует разбирать задания, представленные в ЭКЛ по теоретической части модуля (это в основном несложные одношаговые упражнения на понимание определений, терминов, свойств), и решать более сложные задания из практикума по модулю, предоставляемого в электронном виде в качестве учебно-методического пособия к дисциплине. При этом рекомендуется взаимная помощь между студентами в группе и индивидуальное консультирование у преподавателя, а также использование при необходимости дополнительных учебных ресурсов.

Контрольными обучающими точками по практической части модуля являются две самостоятельные работы – по элементам множеств и по свойствам функций, для каждой из которых предусмотрен интерактивный режим выполнения в течение одного практического занятия. Результирующий контроль примыкает к этому модулю, но включает материал всей дисциплины и проводится в форме аудиторной контрольной работы и расчетно-графической работы (РГР) с её защитой в аудитории. Расчетно-графическая работа «Введение в математический анализ» выполняется примерно в течение одного месяца в домашнем режиме и содержит в основном прикладные учебные заданий более высокого уровня сложности по сравнению с типовыми заданиями контрольной работы. Цель выполнения РГР - формирование знаний, умений и навыков в рамках оцениваемой компетенции по дисциплине на примерах построения решений многошаговых или нестандартных задач, в том числе, задач с параметрами. Экспертиза результатов проводится проверкой представленных решений (с собеседованием по некоторым из них) и защитой РГР в аудитории. Так как в РГР включаются в основном нетиповые задания, решение которых требует творческого подхода и комплексных знаний, то к выполнению РГР не предоставляется методическая разработка, но предполагается взаимодействие между студентами с надеждой активизировать преимущества группового обучения.

Ниже приведены примерные варианты заданий для указанных контрольных точек, а также критерии, по которым оценивается уровень выполнения основных контрольных точек - контрольной работы и РГР.

*Самостоятельная работа №3 «Элементы теории множеств»*

*Задача* 1

Найдите множество $X$ значений $x$, для которых определена функция $y = f(x)$, если

1) $f(x)=\sqrt{5-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\log_2(x+2)$; 2) $f(x)=\sqrt{\cos 3x}$.

*Задача* 2

Запишите элементы каждого из данных множеств $A, B, C, D, F$ и затем перечислите из них те множества, которые являются: 1) дискретными, 2) непрерывными, 3) равными, 4) ограниченными, 5) неограниченными, 6) конечными, 7) бесконечными.

$$A=\{a\,/\,a=5-n,\ n\in \square,\ n\le 9\},\quad B=\{b\in \square\,/\,|b|<5\},\quad C=\{x\in \square\,/\,|x|<5\},$$

$$D=\{x\in \square\,/\,x^2-25<0\},\quad F=\{x_n\,/\,x_n=5-n, n\in \square\}.$$

*Задача* 3

Даны множества: $A=\{x\in \square\,/\,|x|\le 5\}$, $B=\{0;-1;6;3\}$; 1) перечислите элементы множества $A$ списком, изобразите множества $A$ и $B$ на координатных прямых и диаграммой Эйлера - Венна;
2) составьте для данных множеств их объединение, пересечение, разности и симметричную разность, записав предварительно определения этих операций.

*Задача* 4

Постройте множества $A$ и $B$ на одной координатной прямой, если

$$A=\{x\in\square \,/\, |x|\geq 1\},\;\; B=\{x\in\square \,/\, |x|>5\};$$

Запишите промежутками, изобразите их диаграммой Эйлера-Венна и на координатной прямой множество $B'_A$.

*Задача* 5

Перечислите или запишите промежутками элементы следующих множеств:

1) $A=\left\{x\in\square \,/\, |x+4|<7\right\}$; 2) $B=\left\{x\in\square \,/\, 1<|x|\leq 4\right\}$;

3) $C=\left\{x\in\square \,/\, \cos 4x=1, x\in(0;\pi]\right\}$; 4) $X=\left\{x\in\square \,/\, 4^x+3\cdot 2^x-4\leq 0\right\}$;

5) $Y=\left\{x\in\square \,/\, |x-1|-|x-4|<2\right\}$; 6) $L=\left\{x\in\square \,/\, x^2+7x+10\geq 0 \text{ и } \dfrac{x-8}{x-3}\leq 2\right\}$.

*Задача* 6

Даны два бесконечных числовых множества $A=\{x\in\square \,/\, |x-1|\leq 3\}$ и $B=\{x\in\square \,/\, |x+1|<3\}$;

1) запишите эти множества промежутками и постройте их точками на одной координатной прямой;

2) запишите промежутками множества $A\cup B,\; A\cap B,\; A\setminus B,\; B\setminus A,\; A\square B$;

3) запишите по определению и изобразите геометрически множества $A\times B,\; B\times A$.

*Задача* 7

Постройте множества точек на координатной плоскости $xOy$:

1) $A=\left\{(x;y)\,/\,(x-2)\cdot(y+3)>0\right\}$; 2) $B=\left\{(x;y)\,/\,y=\big||x-1|-2\big|\right\}$;

3) $C=\left\{(x;y)\,/\,y=\sin|x|\right\}$; 4) $D=\left\{(x;y)\,/\,y>x^2-2x \text{ и } y<0,5x+2\right\}$;

5) $M_1=\{(x;y)\,/\,x^2-4\leq y<x+2\}$; 6) $M_2=\{(x;y)\,/\,x^2+y^2>4 \text{ и } |x|\geq 1\}$.

*Задача* 8

Дано множество $A=\{x\in\square \,/\, x^2+3x-10\leq 0\}$ и два условия: (1) число $x$ является неположительным, (2) число $x$ удовлетворяет неравенству $|x+1|<2$. Запишите разбиение множества $A$ на подмножества по признаку удовлетворения его элементов условиям (1), (2).

*Задача* 9

Запишите промежутками и опишите неравенствами следующие окрестности точек множества $\overline{\square}$, если $x_0=3,\; \varepsilon=0{,}1$:

1) $U_\varepsilon(x_0)$; 2) $\overset{o}{U}_\varepsilon(x_0)$; 3) $U_\varepsilon(+\infty)$; 4) $\overset{o}{U}_\varepsilon(-\infty)$; 5) $\overset{o}{U}_\varepsilon(\infty)$.

*Задача* 10

Запишите элементы множеств *A, B, C* и охарактеризуйте их ограниченность; укажите точные грани и экстремумы каждого множества:

1) $A=\{x\in\square \,/\, x<1\}$, 2) $B=\{x\in\square \,/\, |x-3|<3\}$, 3) $C=\{x\,/\,x=\dfrac{1}{n^2},\; n\in\square\}$.

*Ответы к заданиям самостоятельной работы №3 «Элементы теории множеств»*

*Задача 1*

1) $X=(-1;5]$;  2) $X=\bigcup\limits_{k}[-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3};\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}],\ k\in \mathbb{Z}$.

*Задача* 2

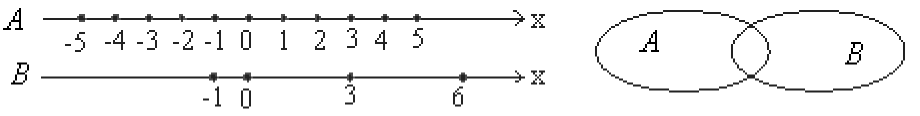
$A=\{4,3,2,1,0,-1,-2,-3,-4\}$;  $B=(-5;\ 5)$;  $C=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$;  $D=(-5;\ 5)$;

$F=\{4,3,2,1,0,-1,-2,...\}$;

1) дискретные множества: *A, C, F*;  2) непрерывные множества: *B, D*;
3) равные множества: *A=C*,  *B=D*;
4) ограниченные множества: *A, B, C, D*;  5) неограниченные множества: *F*;
6) конечные множества: *A, C*;  7) бесконечные множества: *F, B, D*.

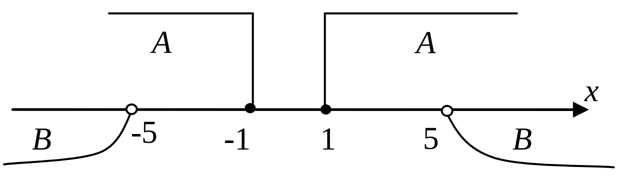
*Задача* 3

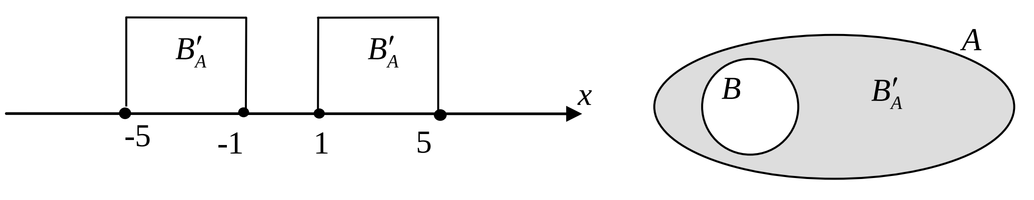
1) $A=\{0;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm4;\ \pm5\}$;




2)
$A\cup B=\{0;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm4;\ \pm5;\ 6\}$,  $A\cap B=\{0;-1;3\}$,  $A\setminus B=\{1;\pm2;-3;\pm4;\pm5\}$,
$B\setminus A=\{6\}$,  $A\triangle B=\{1;\ \pm2;\ -3;\ \pm4;\ \pm5;\ 6\}$.

*Задача* 4




$B'_A=[-5;-1]\cup[1;5]$

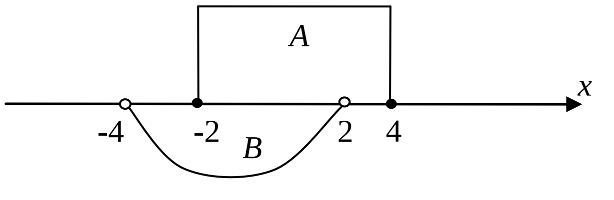
*Задача* 5

1) $A=\{1;2\}$;  2) $B=\{-4;-3;-2;2;3;4\}$;  3) $C=\{\frac{\pi}{2};\pi\}$;

4) $X=(-\infty;0]$;  5) $Y=(-\infty;3.5)$;  6) $L=(-\infty;-5]\cup\{-2\}\cup(3;+\infty)$.

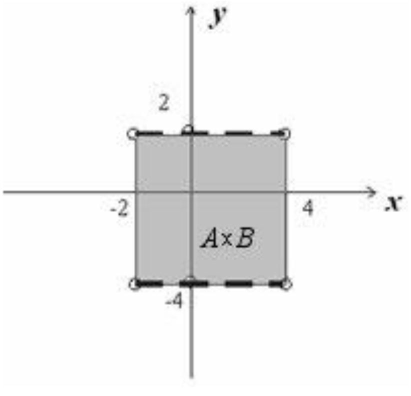
*Задача* 6

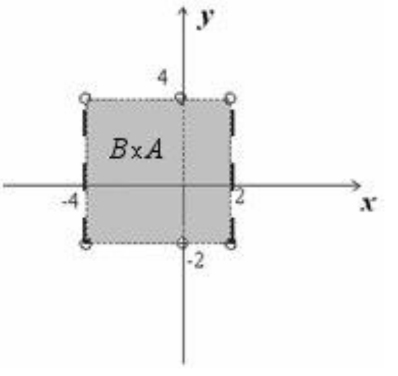
1)
$A=[-2;\ 4]$,  $B=(-4;\ 2)$




2) $A\cup B=(-4;4]$,  $A\cap B=[-2;2)$,  $A\setminus B=[2;4]$,  $B\setminus A=(-4;-2)$,  $A\triangle B=(-4;\ -2)\cup[2;\ 4]$;

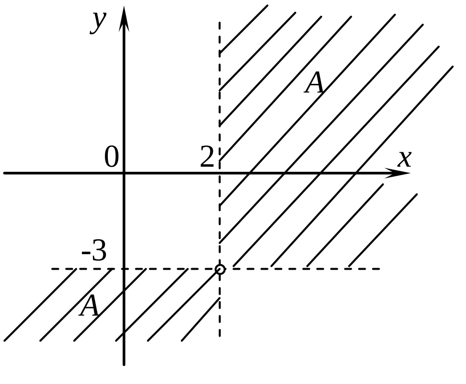
3) $A\times B=\{(x;y)\,/\,x\in[-2;4],\ y\in(-4;2)\}$,  $B\times A=\{(x;y)\,/\,x\in(-4;2),\ y\in[-2;4]\}$;



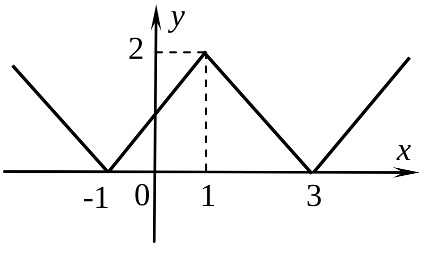




*Задача* 7

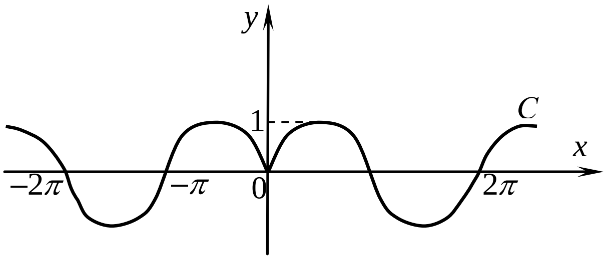
1)



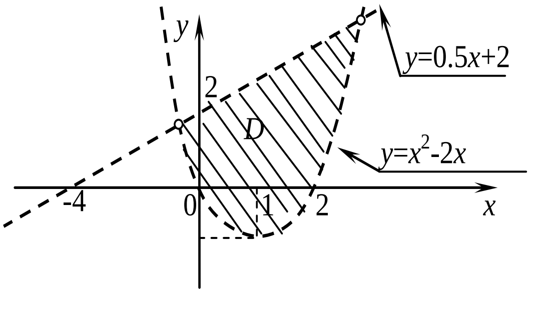

2)

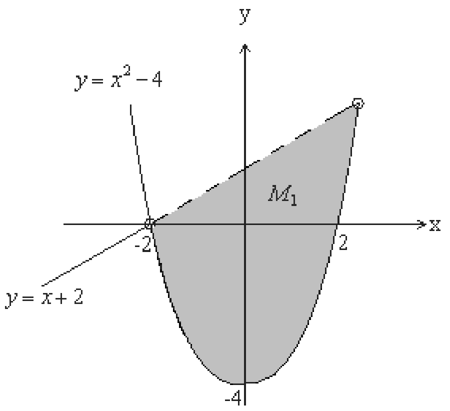


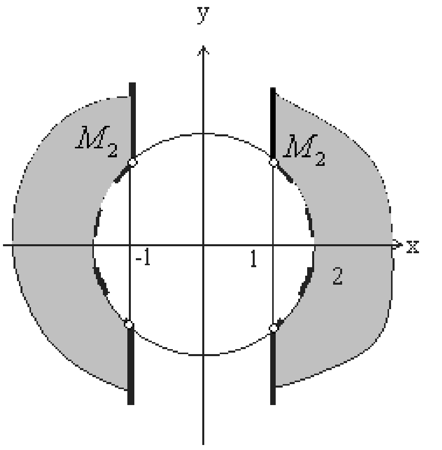

3)




4)






$M_1 : x^2-4 \le y < x+2$

$M_2 : \begin{cases} x^2+y^2>4 \\ |x| \ge 1 \end{cases}$

*Задача* 8

$$A_1=[-5;-3],\quad A_2=(0;1),\quad A_3=(-3;0],\quad A_4=[1;2]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = A = [-5;\ 2] \\ A_i \cap A_j = 0 \quad \text{при}\ \forall i \ne j. \end{cases}$$

*Задача* 9

1) $U_{0,1}(3)=\left(2{,}9;\ 3{,}1\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ |x-3|<0{,}1\right\}$;

2) $\overset{o}{U}_{0,1}(3)=(2{,}9;\ 3)\cup(3;3{,}1)=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ 0<|x-3|<0{,}1\right\}$;

3) $U_{0,1}(+\infty)=(10;+\infty]=\left\{x\in\overline{\mathbb{R}}\ /\ x>10\right\}$;

4) $\overset{o}{U}_{0,1}(-\infty)=(-\infty;\ -10)=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x<-10\right\}$;

5) $\overset{o}{U}_{0,1}(\infty)=(-\infty;-10)\cup(10;+\infty)=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ |x|>10\right\}$.

*Задача* 10

1) $A=\left\{0,-1,-2,-3,\ldots\right\}$ - неограниченное множество, т.к. не является ограниченным снизу;

$$\sup A=0,\quad \inf A=-\infty;\quad \max A=0,\quad \min A - \text{не сущ.};$$

2) $B=(0;\ 6)$ - ограниченное множество, т.к. является ограниченным сверху и снизу;

$$\sup B=6,\quad \inf B=0;\quad \max B - \text{не сущ.},\quad \min B = -\text{не сущ.};$$

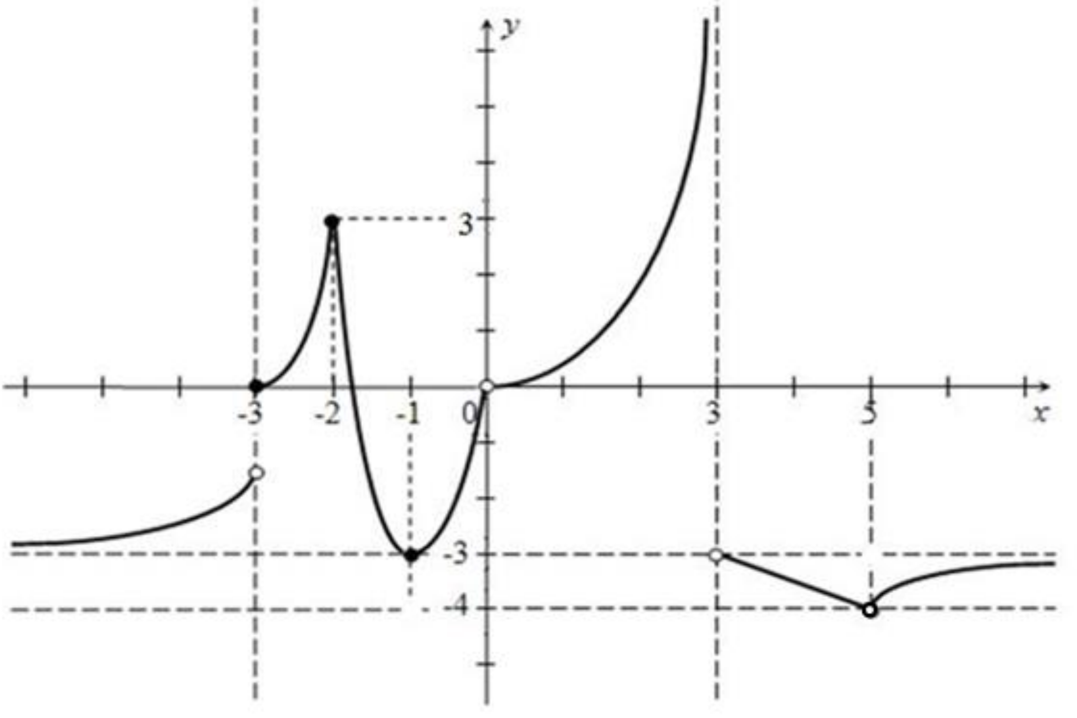
3) $C=\left\{1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\ldots,\frac{1}{n^2},\ldots\right\}$ - ограниченное множество, т.к. является ограниченным сверху и снизу;

$$\sup C=1,\quad \inf C=0;\quad \max C=1,\quad \min C - \text{не сущ.}$$

*Самостоятельная работа №4 «Числовые функции и их графики»*

*Задание* 1

Укажите все глобальные характеристики функции по её графику:




*Задание* 2

Постройте график функции и по графику опишите её свойства:

1) $y = \sin x + |\sin x|$; 2) $y = |2x - 3| + |x + 2|$, $x \in [-4;4]$.

*Задание* 3

Найдите образ $B = f(A)$ множества $A=\{x\}$ при отображении функцией $y = f(x)$; изобразите отображение $A \to B$ графически и укажите его тип: $f(x) = -|\log_3 x|$, $A = [\frac{1}{3};27)$.

*Задание* 4

Найдите множество $A$, которое является прообразом множества $B=\{y\}$ при отображении функцией $y = f(x)$; изобразите отображение $A \to B$ графически и укажите его тип: $y = \frac{2x-1}{x-1}$, $B = [3;5]$.

*Ответы к заданиям самостоятельной работы №4 «Числовые функции и их графики»*

*Задание* 1

ООФ : $x \in (-\infty;0) \cup (0;3) \cup (3;+\infty)$; ОЗФ : $y \in (-4;+\infty)$;

множество нулей функции и множества, на которых функция имеет знакопостоянные значения:

$D_0 = \{-3; -1{,}7\}$, $D_- = (-\infty; -3) \cup (-1{,}7;0) \cup (3;+\infty)$, $D_+ = (-3; -1{,}7) \cup (0;3)$;

функция непериодическая; функция не является ни четной, ни нечетной;

монотонность функции:

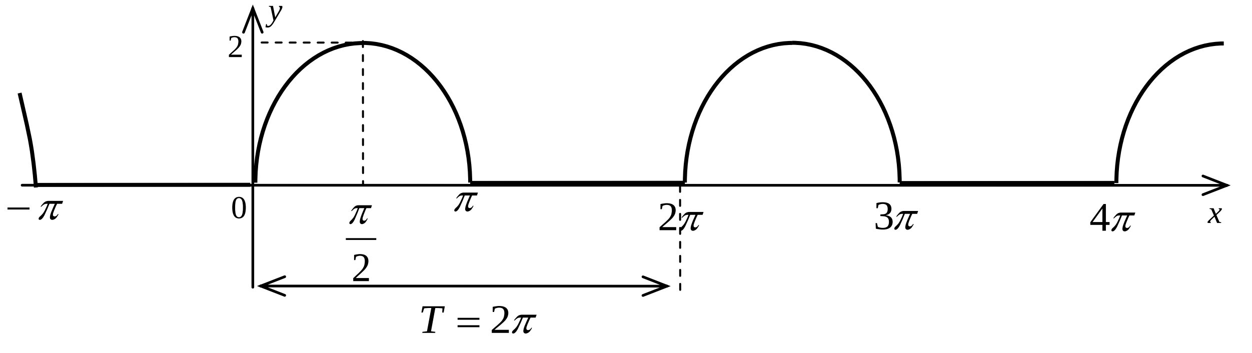
$f(x) \uparrow$ при $x \in (-\infty; -2)$, $x \in (-1; 0)$, $x \in (0; 3)$, $x \in (5; +\infty)$, $f(x) \downarrow$ при $x \in (-2; -1)$, $x \in (3; 5)$;

локальные экстремумы функции: $y_{\max} = 3$ при $x = -2$, $y_{\min} = -3$ при $x = -1$;

глобальные экстремумы функции: на ООФ $y_{наим}$ не $\exists$, $y_{наиб}$ не $\exists$;
функция не ограничена, так как множество её значений не является ограниченным сверху;
точные грани функции: $\sup f(x)=+\infty, \quad \inf f(x)=-4$.

*Задание* 2

**1)** $y=\sin x+|\sin x| \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} y=2\sin x, & x\in[0+2\pi n;\ \pi+2\pi n],\ n\in\mathbb{Z} \\ y=0, & x\in(\pi+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n),\ n\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$



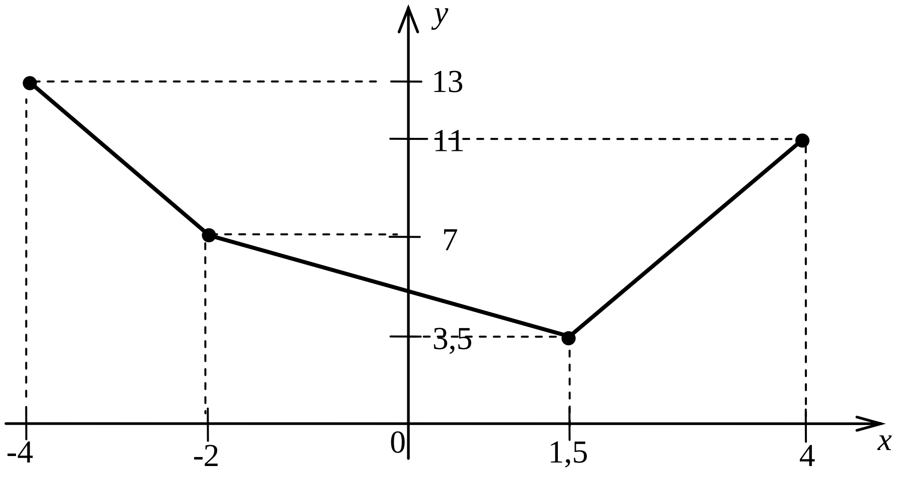

ООФ : $x\in(-\infty;+\infty)$; ОЗФ : $y\in[0;2]$;
множество нулей функции и множества, на которых функция имеет знакопостоянные значения:
$D_0=\{x\,/\,x\in[-\pi+2\pi n;\ 0+2\pi n],\ n\in\mathbb{Z}\}$, $D_+=\{x\,/\,x\in(0+2\pi n;\ \pi+2\pi n),\ n\in\mathbb{Z}\}$, $D_-=\varnothing$;
функция $y=f(x)$ является периодической с наименьшим периодом $T=2\pi$;
функция $y=f(x)$ не является ни четной, ни нечетной;
промежутки монотонности функции:

$f(x)\uparrow$ при $x\in(0+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n),\ n\in\mathbb{Z}$, $\quad f(x)\downarrow$ при $x\in(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \pi+2\pi n),\ n\in\mathbb{Z}$;

локальные экстремумы функции: $y_{\max}=2$ при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}$;

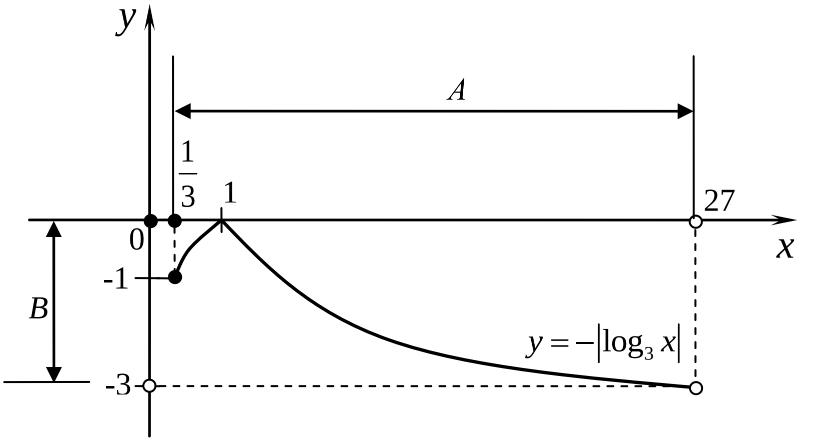
строгих локальных минимумов нет;
глобальные экстремумы функции на ООФ: $y_{наиб}=2, \quad y_{наим}=0$;
функция ограничена, так как множество её значений ограничено;
точные грани функции: $\sup f(x)=2, \quad \inf f(x)=0$.

**2)** $y=|2x-3|+|x+2|, \quad x\in[-4;4] \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} y=1-3x, & x\in[-4;-2) \\ y=5-x, & x\in[-2;\ \frac{3}{2}] \\ y=3x-1, & x\in(\frac{3}{2};4] \end{array}\right.$



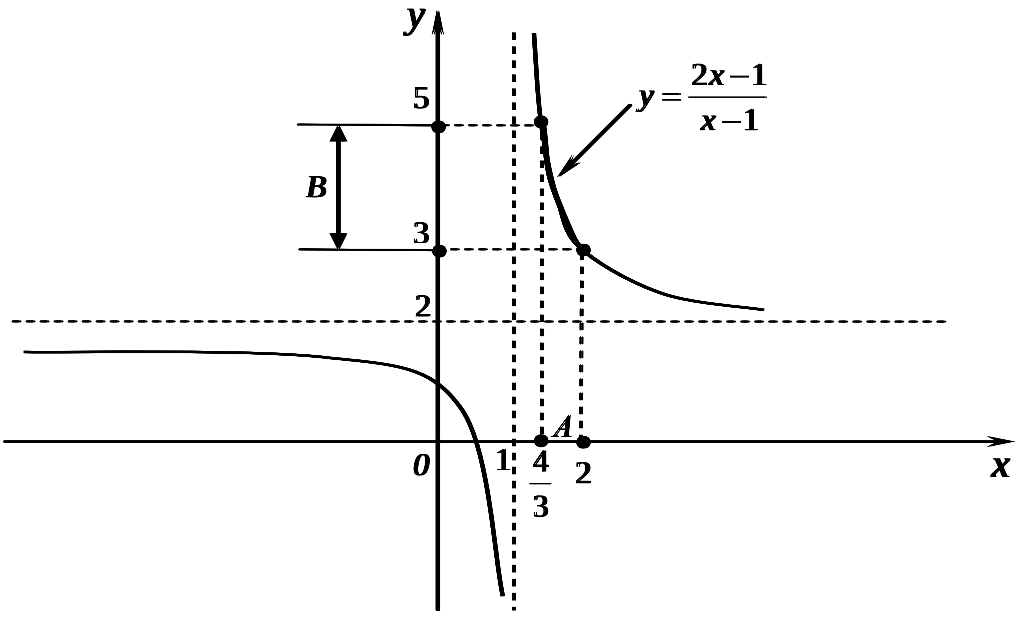

ООФ : $x \in [-4; 4]$;  ОЗФ : $y \in [3{,}5; 13]$;
множества нулей функции и значений ее знакопостоянства: $D_0 = \varnothing, D_+ = [-4; 4]$, $D_- = \varnothing$;
функция не является периодической и свойством четности не обладает;
промежутки монотонности функции: $f(x)\uparrow$ при $x \in (1{,}5; 4)$, $f(x)\downarrow$ при $x \in (-4; 1{,}5)$;
локальные экстремумы функции: $y_{\min} = 3{,}5$ при $x = 1{,}5$; $y_{\max}$ нет;
глобальные экстремумы функции: на ООФ $y_{наиб} = 13$, $y_{наим} = 3{,}5$;
функция ограничена, так как множество её значений ограничено;
точные грани функции: $\sup f(x) = 13$, $\inf f(x) = 3{,}5$.

*Задание* 3




Множество $B = \{y \,/\, y \in (-3; 0]\}$ является образом множества $A = \left\{x \,/\, x \in \left[\frac{1}{3}; 27\right)\right\}$ при отображении функцией $y = -|\log_3 x|$; отображение $A \to B$ является сюръективным, но не является инъективным, следовательно, не является биективным.

*Задание* 4




Множество $A=\left\{x\,/\,x\in\left[\frac{4}{3};2\right]\right\}$ является прообразом множества $B=\{y\,/\,y\in[3;5]\}$ при отображении функцией $y=\frac{2x-1}{x-1}$; отображение $A\to B$ является сюръективным и инъективным, следовательно, является биективным.

*Контрольная работа «Введение в математический анализ»*

*Задача* 1

Даны непрерывные множества $A=\{x\in\mathbb{R}\ /\ \frac{x^2}{x+10}\le 5\}$ и $B=\{x\in\mathbb{R}\ /\ 2^{|x-8|}<16\}$. Требуется:

1) записать множества $A$ и $B$ промежутками и построить на одной координатной прямой;
2) охарактеризовать ограниченность $A$ и $B$, указать их точные грани и экстремумы;
3) записать промежутками множества $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A'=\mathbb{R}\setminus A, B'=\mathbb{R}\setminus B$;
4) записать по определению и построить на координатной плоскости множество
$D=\left(A\cap B\right)\times\left(B\setminus A\right)$.

*Задача* 2

Построить множества точек на координатной плоскости *XOY*:

1) $A=\{(x;y)/x^2+y^2\le 4y\}$, $B=\{(x;y)/x+2y>2\}$;
2) $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

*Задача* 3

1) Найти *ООФ* и *ОЗФ* функции: $y=\arccos(x^2-1)+\pi$;
указать тип отображения *ООФ* → *ОЗФ*;
2) найти *ООФ* $y=f(x)$, $x\ge 0$, если $f(x)=\lg\frac{x+5}{9-x}+\sqrt[4]{x+7}-\frac{1}{\sqrt[3]{x-8}}$ .

*Задача* 4

Дана функция $f(x)=2^{x-x^3}-1$. Требуется:

1) охарактеризовать четность функции $y = f(x)$;

2) найти множества $D_+ = \{x / f(x) > 0\}$, $D_- = \{x / f(x) < 0\}$, $D_0 = \{x / f(x) = 0\}$.

*Задача* 5

Для данной функции $f(x) = -\log_3(x-1)$ требуется:

1) найти обратную функцию $y = f^{-1}(x)$;

2) построить графики обеих функций в одной системе координат;

3) записать *ООФ* и *ОЗФ* каждой из функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$.

*Задача* 6

Дана функция $f(x) = |5\sin 3x|$ и множество $E = [0; \pi/3)$. Требуется:

1) построить график функции $y = f(x)$ на её естественной *ООФ*;

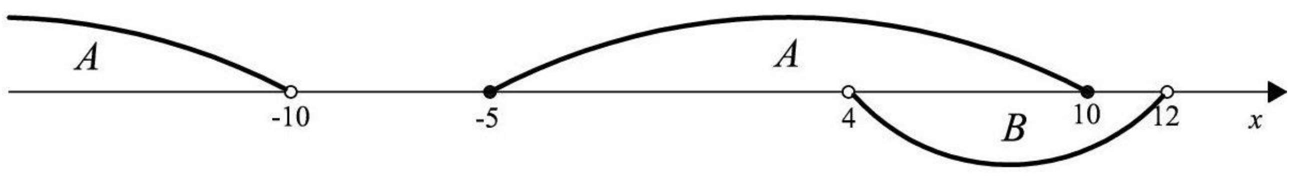
2) записать по графику основные характеристики функции: *ООФ*, *ОЗФ*, множества нулей функции и значений ее знакопостоянства, четность, периодичность, монотонность, локальные экстремумы, наибольшее и наименьшее значения функции на *ООФ*, ограниченность и точные грани;

3) найти множество $G = f(E)$; изобразить отображение $E \to G$ геометрически и указать, является ли оно биекцией.

*Ответы к задачам варианта 0 контр. работы «Введение в математический анализ»*

*Задача* 1

1) $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \dfrac{x^2}{x+10} \le 5\} = (-\infty; -10) \cup [-5; 10]$, $B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2^{|x-8|} < 16\} = (4; 12)$;




2) $A$ – неограниченное множество, так как является ограниченным сверху, но неограниченным снизу; $\sup A = 10$, $\inf A = -\infty$; $\max A = 10$, $\min A$ – не существует;

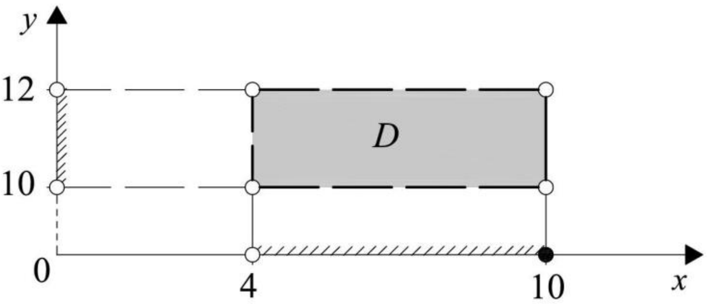
$B$ – ограниченное множество, так как является ограниченным и сверху и снизу; $\sup B = 12$, $\inf B = 4$; $\max B$ – не существует, $\min B$ – не существует;

3) $A \cup B = (-\infty; -10) \cup [-5; 12)$; $A \cap B = (4; 10]$; $A \setminus B = (-\infty; -10) \cup [-5; 4]$;

$B \setminus A = (10; 12)$; $A' = [-10; -5) \cup (10; +\infty)$; $B' = (-\infty; 4] \cup [12; +\infty)$;

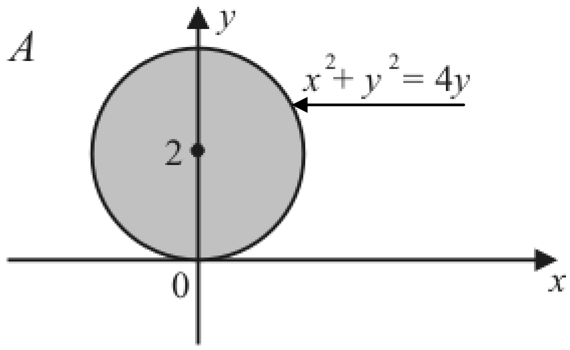
4) $D = \{(x; y) \ / \ x \in (A \cap B), \ y \in (B \setminus A)\} =$

$= \{(x; y) \ / \ x \in (4; 10], \ y \in (10; 12)\}$

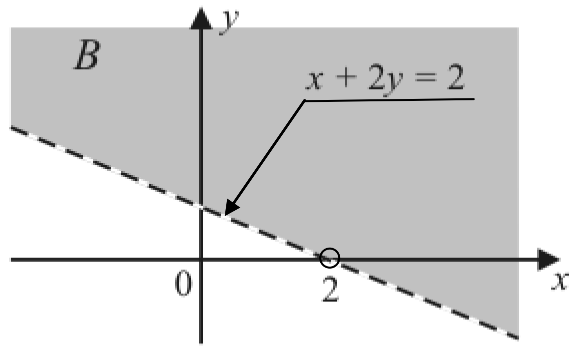


*Задача* 2

1)

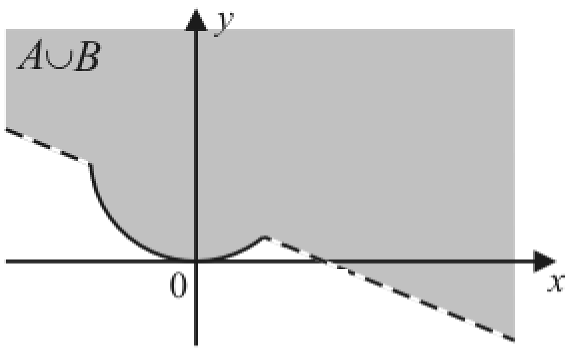


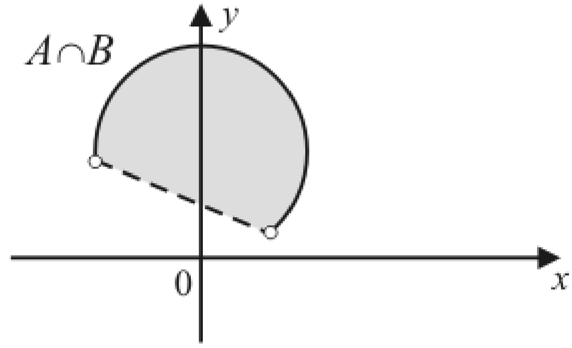

$A = \{(x; y) / x^2 + y^2 \le 4y\}$

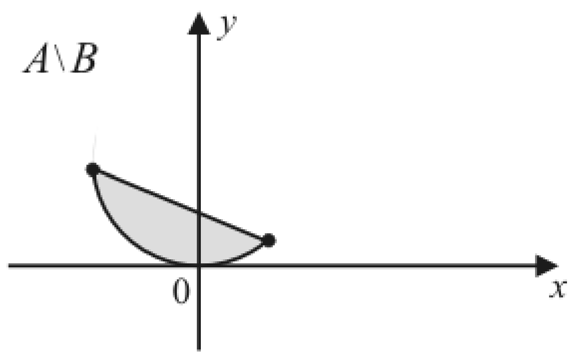


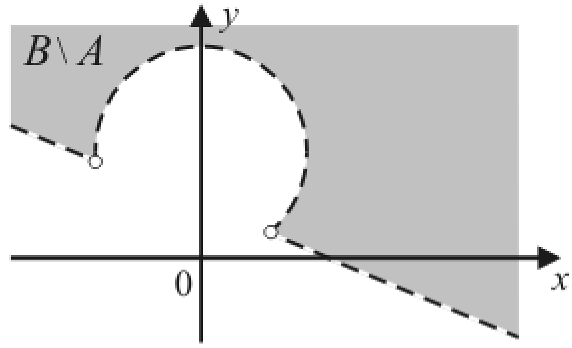

$B = \{(x; y) / x + 2y > 2\}$

2)




*Задача* 3

1) *ООФ* $f(x)$: $x \in [\sqrt{2}; \sqrt{2})$, *ОЗФ* $f(x)$: $y \in [\pi; 2\pi]$; отображение *ООФ→ОЗФ* является сюръекцией, но не является инъекцией, поэтому не является и биекцией;

2) *ООФ* $y = f(x),\ x \ge 0$: $x \in [0; 8) \cup (8; 9)$.

*Задача* 4

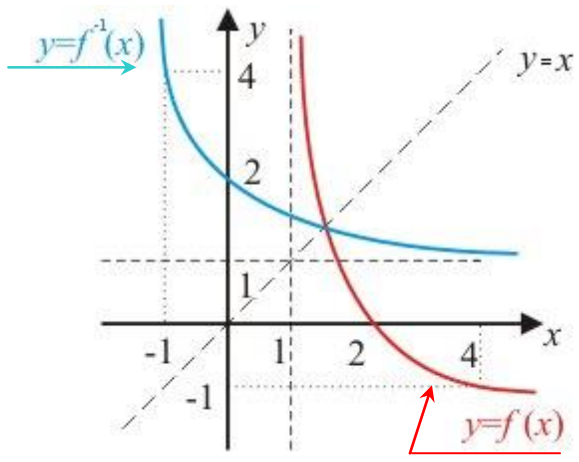
1) Данная функция свойством четности не обладает (так как не удовлетворяет определениям четной функции или нечетной функции);

2) $D_+ = (-\infty; -1) \cup (0; 1)$, $D_- = (-1; 0) \cup (1; +\infty)$, $D_0 = \{-1; 0; 1\}$.

*Задача* 5

1) Если $f(x) = -\log_3(x-1)$, то $f^{-1}(x) = 3^{-x} + 1$;

2) графики $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ являются симметричными относительно прямой $y = x$:

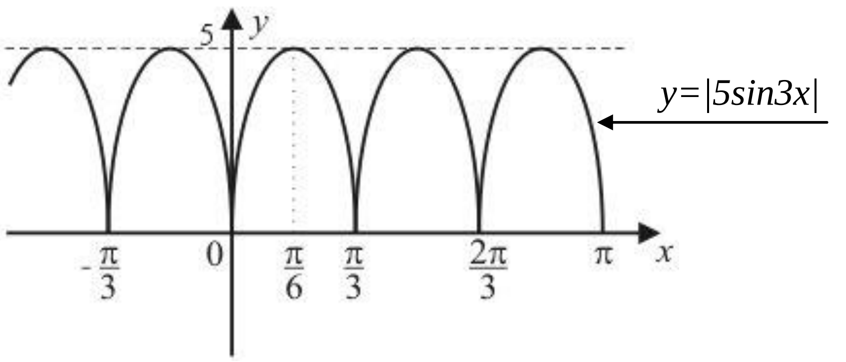



3) $y = f(x) \Rightarrow$ *ООФ*: $x \in (1;+\infty)$, *ОЗФ*: $y \in \mathbb{R}$;

$y = f^{-1}(x) \Rightarrow$ *ООФ*: $x \in \mathbb{R}$, *ОЗФ*: $y \in (1;+\infty)$.

*Задача* 6

1)




2) $f(x) = |5\sin 3x| \Rightarrow$ *ООФ*: $x \in \mathbb{R}$, *ОЗФ*: $y \in [0;5]$;

множества нулей функции и значений ее знакопостоянства:

$D_0 = \left\{ x \,/\, x = \dfrac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z} \right\}$, $\quad D_+ = \left\{ x \,/\, x \in \left(0 + \dfrac{\pi n}{3}; \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi n}{3}\right),\ n \in \mathbb{Z} \right\}$, $\quad D_- = \varnothing$;

функция четная, так как её *ООФ* симметрична относительно числа 0 и выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in$ *ООФ*;

функция периодическая с наименьшим периодом $T = \dfrac{\pi}{3}$, так как выполняется равенство $f(x \pm T) = f(x)$ $\forall x \in$ *ООФ*;

промежутки монотонности:

$f(x)\uparrow$ при $x \in \left(0 + \dfrac{\pi n}{3}; \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $\qquad f(x)\downarrow$ при $x \in \left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}; \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi n}{3}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;

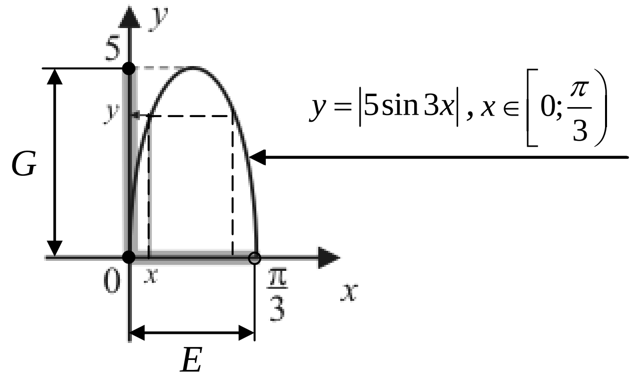
локальные экстремумы:

$y_{\min} = 0$ при $x = \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\quad y_{\max} = 5$ при $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$;

наибольшее и наименьшее значения функции на *ООФ*: $y_{наиб} = 5$, $y_{наим} = 0$;

функция ограниченная, $\sup f(x) = 5$, $\inf f(x) = 0$.

3) Если $E = [0; \pi/3)$, то $G = f(E) = [0;5]$;




отображение $E \xrightarrow{f(x)} G$ не является биекцией, так как не является инъекцией.

*Критерии оценивания контрольной работы*

| | |
|---|---|
| Уровень «отлично» | Контрольная работа выполнена полностью, допущенные негрубые ошибки и недочеты исправлены в режиме доработок. Сформированы необходимые умения, успешно и систематически применяются навыки по решению основных практических задач, относящихся к указанной дисциплине. |
| Уровень «хорошо» | Контрольная работа выполнена полностью, допущенные негрубые ошибки и недочеты исправлены в режиме доработок, но выбор методов решения неуверенный и обоснования шагов в решениях недостаточны. Сформированы в целом успешные, но содержащее отдельные пробелы умения и навыки по решению основных практических задач, относящихся к указанной дисциплине. |
| Уровень «удовлетворительно» | В контрольной работе допущены грубые ошибки и (или) недочеты, исправленные после рецензии преподавателя. Студент владеет основными обязательными умениями по проверяемым темам. В целом успешное, но не систематическое применение навыков по решению основных практических задач, относящихся к указанной дисциплине. |
| Уровень «неудовлетворительно» | Контрольная работа не выполнена. Умения и навыки по решению основных практических задач, относящихся к указанной дисциплине, не сформированы на должном уровне. |

*Вариант расчетно-графической работы «Введение в математический анализ»*

*Задание* 1

Постройте множества точек плоскости:

1) $A = \{(x; y) /\ |x| - |y| \le 1$ и $|x| + |y| \le 2\}$;

3) $B = \{(\varphi; \rho) /\ \ \rho < 2 + \cos\varphi\}$;

2) $D = \{(x; y) / (x^2 + y^2)^3 = 4a^2 xy(x^2 - y^2),\ a > 0\}$

4) $C = \{(\varphi; \rho) /\ 1 \le \rho \le 2\sin 3\varphi\}$;

здесь $(x; y)$ – это декартовы прямоугольные координаты точек,

$(\varphi; \rho)$ – это полярные координаты точек.

*Задание* 2

Найдите множество $A$ значений $a$, при которых неравенство $(x-a)\cdot\sqrt{x+3}\le 0$ имеет ровно 4 целых решения. Укажите следующие характеристики множества $A$: ограниченность, точные грани, экстремумы, мощность множества.

*Задание* 3

Постройте множество $B$ и перечислите его элементы:

$$B=\{(x;y)\,/\,x\in□\ ,\ y\in□\ ,\ 2x+y\ge 2,\ x-2y\ge -1,\ 2x-y\le 4,\ x+y\le 4\}.$$

Перечислите элементы, укажите их количество и найдите экстремумы следующего множества:

$$A=\{z\,/\ z=3x+2y+5,\ (x;y)\in B\}.$$

*Задание* 4

Найдите все значения параметра $a$, при которых множество решений неравенства $(a-1)x>1$ является подмножеством множества решений неравенства $5x>a+3$.

*Задание* 5

Найдите образ $f(A)$ множества $A=\{x\}$ при отображении функцией $f(x)$, укажите тип отображения $A\to f(A)$: $f(x)=\ln(1-\cos^2 x)$; $A=(0;\pi)$.

*Задание* 6

Найдите множество $A=\{x\}$, которое является прообразом множества $B=[0;3)$ при отображении функцией $f(x)=\left|\ln|x-2|\right|$; укажите тип отображения $A\to B$.

*Задание* 7

Постройте графики функций $y=f(x),\ y=g(x),\ y=f(g(x))$ и $y=g(f(x))$ и опишите отображения множеств, задаваемых каждой из этих функций: $f(x)=\cos x,\ \ g(x)=\arccos x$.

*Задание* 8

Функция $y=f(x)$ определена так: в каждом из промежутков $x\in[n;n+1),\ n\in□$ функция является линейной, причём $f(n)=-1,\ \ f(n+0{,}5)=0$. Постройте график этой функции и перечислите её глобальные свойства. Какова мощность множества, элементами которого являются промежутки монотонности этой функции?

*Задание* 9

Постройте схематично графики каждой из следующих функций, охарактеризуйте их ограниченность, укажите их точные грани и глобальные экстремумы:

1) $y=\dfrac{x^4}{1+x^4}$;   2) $y=\ln\sin x$;   3) $y=x\cos x$.

*Задание* 10

Постройте график функции $y=[x^2]$, опишите её свойства и укажите мощность множества её значений.

*Задание* 11

Башня имеет следующую форму: на прямой круглый усеченный конус с радиусами оснований $2R$ (нижнего) и $R$ (верхнего) и высотой $R$ поставлен цилиндр радиуса $R$ и высоты $2R$; на цилиндре установлена полусфера радиуса $R$. Выразите площадь $S$ поперечного сечения башни как функцию расстояния $x$, на которое сечение удалено от нижнего основания конуса. Постройте график функции $S = f(x)$.

*Задание* 12

Материальная точка $M(x;\, y)$ движется по плоской траектории в течение шести минут так, что её декартовы прямоугольные координаты изменяются в зависимости от времени $t$ по следующему закону: $\begin{cases} x(t) = 2\cos^3 \pi t \\ y(t) = 2\sin^3 \pi t \end{cases}$. Постройте траекторию движения по точкам, взяв шаг то $t$, равный 30 секундам. Составьте уравнение траектории в виде функции $y(x)$, имеющей неявное и явное задание.

*Задание* 13

Выполните действия над комплексными числами:

1) $\dfrac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$; 2) $\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^4}{(-2+2i)^2}$; 3) $\dfrac{z^{124}}{z^{98} - iz^{98}}$, если $z = \sqrt{3} + i$.

*Задание* 14

Найдите множество $X = \{x \in □ \;/\; |4i - 1 + \log_{0,5} x| \ge 5\}$.

*Задание* 15

Решите следующие алгебраические уравнения на множестве комплексных чисел:

1) $4x^2 - 8x + 5 = 0$; 2) $x^2 + (i-6)x + 8 - 4i = 0$; 3) $x^4 + 16 = 0$;

4) $x^{12} - 1 = 0$; 5) $x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0$; 6) $6x^4 + 7x^3 + 5x^2 - x - 2 = 0$.

*Примерный вариант заданий для защиты РГР «Введение в математический анализ»*

1. Даны два множества: $X_1 = \{x \,/\; |x-2| < 10\}$, $X_2 = \{x \,/\, x^2 < a\}$.
   Найдите множество $A = \{a \,/\, X_2 \subset X_1\}$.
2. Дано множество $A = \{(x;y) \,/\, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z},\ \ 0 \le x \le 2,\ \ 0 \le y \le 2x\}$. Найдите $n(A)$.
3. Дана функция $f(x) = 2^{x^2-1}$ и множество $A = [-1;2)$. Найдите $f(A)$.
4. $f(x) = \dfrac{2x-1}{1-x}$. Найдите множество $A = \{x \,/\, y = f(x),\ y \in [0;1]\}$.
5. Сколько точек локальных экстремумов имеет функция $y = |x - x^2| + 1$?
6. Найдите $\min X$, если $X$ – это ООФ $y = \sqrt{2 - \lg|x-2|}$.
7. Укажите номера функций, обладающих свойством четности:
   1) $y = \sin\dfrac{1}{x}$; 2) $y = (x^2-1)^{-1}$; 3) $y = |x-1|$; 4) $y = \dfrac{\cos x}{x^2}$.
8. Найдите длину промежутка, на который функция $y = \sqrt{|x|}$ отображает интервал $(-4;9)$.
9. Выполните действия над комплексными числами в алгебраической форме:
   $$z = \frac{3+i}{(1+i)(1-2i)} + \frac{(2+i)^2}{1+2i}.$$
10. Выполните действия над комплексными числами в тригонометрической форме:
   $$z = \frac{z_1^{13}}{z_2^{7}}, \quad z_1 = 1+i, \quad z_2 = 1-i..$$
11. Найдите корни квадратного уравнения и сделайте проверку по теореме Виета:

$$z^2 - 20z + 92 + 6i = 0.$$

12. Решите биквадратное уравнение на множестве комплексных чисел:

$$x^4 + 7x^2 + 12 = 0.$$

*Ответы к заданиям защиты РГР*

**1.** $A = (-\infty; 64]$. **2.** $n(A) = 9$. **3.** $f(A) = [0,5; 8)$. **4.** $A = \left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$. **5.** 3.

**6.** $\min X = -98$. **7.** 1), 2), 4). **8.** 3. **9.** $3 + 0,2i$. **10.** $z = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = -8$.

**11.** $z_1 = 13 - i,\ z_2 = 7 + i$. **12.** $x \in \{2i; -2i; i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$.

*Критерии оценивания расчетно-графической работы*

| | |
|---|---|
| Уровень «отлично» | Расчетно-графическая работа выполнена в полном объёме и успешно защищена, оформление решений четкое и обоснованное. Сформированы на достаточном уровне умения и навыки по решению усложненных и оригинальных практических задач, относящихся к дисциплине в целом. |
| Уровень «хорошо» | РГР и её защита выполнены полностью, но теоретические обоснования шагов в решениях недостаточны. Умения и навыки по решению усложненных и оригинальных практических задач, относящихся к дисциплине, сформированы в целом успешно, но с отдельными пробелами. |
| Уровень «удовлетворительно» | В решениях заданий РГР или при защите допущены грубые ошибки или большое количество недочетов. В целом успешное, но не систематическое представление предполагаемых умений и навыков при решении прикладных задач. |
| Уровень «неудовлетворительно» | РГР не выполнена или не защищена. Умения и навыки по решению предложенных практических задач, относящихся к указанной дисциплине, не сформированы на должном уровне. |

# 4 Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной

## 4.1 Описание теоретической части модуля

Понятие предела функции относится к основным понятиям математического анализа и является одним из самых трудных понятий высшей математики. Усвоение темы о пределе и непрерывности функций одного аргумента необходимо для дальнейшего изучения дисциплины. Поэтому по всем параграфам модуля рекомендуется обучающимся составить свой краткий конспект по теории в соответствии с подробным содержанием каждого параграфа. С целью определения рамок изучения темы ниже приводится список параграфов темы, в котором после названия каждого параграфа даётся его подробное содержание.

§1. *Предел последовательности и его основные свойства.*

Определение числовой последовательности, примеры.

Определение предела числовой последовательности, примеры.

Определения сходящейся и бесконечно большой последовательностей.

Основные свойства пределов последовательностей: единственность предела, предел постоянной (стационарной) последовательности, переход к пределу в равенствах и неравенствах, теорема о зажатой последовательности, бесконечно малая последовательность, связь сходящейся последовательности с ее пределом и бесконечно малой последовательностью.

§2. *Предел монотонной и ограниченной последовательности. Определение числа е.*

Определение монотонно возрастающей, монотонно убывающей, неубывающей и невозрастающей последовательностей; примеры.

Определения последовательности, ограниченной снизу или ограниченной сверху.

Определение ограниченной последовательности и две формы его записи.

Определение неограниченной последовательности.

Теорема Вейерштрасса о пределе ограниченной монотонной последовательности.

Определение числа $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

§3. *Определение предела функции в точке* $x=a$ *и при* $x\to\infty$. *Односторонние пределы, их связь с пределом функции.*

Определение конечного предела функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ на языке последовательностей (по Гейне) и на языке "$\varepsilon-\delta$" (по Коши); графические иллюстрации к этим определениям.

Определение правостороннего и левостороннего пределов функции.

Связь односторонних пределов с обычным пределом функции.

Определение конечного предела функции $y=f(x)$ при условии $x\to\infty$ ($x\to+\infty$, $x\to-\infty$), графические иллюстрации к определению.

§4. *Ограниченные, бесконечно большие и бесконечно малые функции. Их основные свойства и связь с пределом функции.*

Определения функции, ограниченной на множестве $X$ и ограниченной при условии $x\to a$ (локально ограниченной), примеры.

Определение бесконечно большой функции при условии $x\to a$ или при условии $x\to\infty$, графические иллюстрации к определению.

Определение бесконечно малой функции при условии $x\to a$ или при условии $x\to\infty$, графические иллюстрации к определению.

Основные свойства бесконечно малых, бесконечно больших и локально ограниченных функций:

- связь бесконечно большой функции с ее неограниченностью, примеры;
- связь локально ограниченной функции с существованием ее конечного предела;
- связь между функцией, ее конечным пределом в некоторой точке и бесконечно малой функцией в этой же точке (основная теорема о конечных пределах).

§5. *Теоремы о конечных пределах функций. Понятие о неопределенностях.*

Основная теорема о конечном пределе функции (теорема о связи функции, ее конечного предела и бесконечно малой функции).

Теорема о пределе суммы и разности функций; следствие о единственности предела функции.

Теорема о пределе произведения функций; следствие о вынесении постоянного множителя за знак предела.

Теорема о пределе отношения функций.

Теорема о предельном переходе в неравенствах и о пределе промежуточной функции; графические иллюстрации к этим теоремам.

Понятие о неопределенностях и примеры их раскрытия.

§6. *Замечательные пределы.*

Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, его доказательство, график функции $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

Замечательные пределы $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$, их доказательство и примеры использования.

Вывод второго замечательного предела $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$, его применение к раскрытию неопределенности $\left[1^\infty\right]$.

Понятие о замечательном пределе $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^m-1}{x}=m$, примеры его использования.

§7. *Сравнение бесконечно малых функций. Основные соотношения эквивалентностей бесконечно малых. Принцип замены эквивалентных бесконечно малых.*

Определение следующих понятий:

- б.м. $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем б.м. $\beta(x)$, при $x\to a$ ($\alpha=\mathrm{o}(\beta)$ при $x\to a$);
- б.м. $\alpha(x)$ имеет более низкий порядок малости, чем б.м. $\beta(x)$, при $x\to a$;

- б.м. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют одинаковый порядок малости при $x \to a$ ($\alpha = O(\beta)$ при $x \to a$);

- б.м. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны при $x \to a$ ($\alpha \sim \beta$ при $x \to a$);

- б.м. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ сравнить нельзя при $x \to a$.

Примеры сравнения бесконечно малых. Список основных теоретических соотношений эквивалентности бесконечно малых функций.

Теорема о замене бесконечно малых множителей на эквивалентные, примеры использования теоремы.

§8. *Непрерывность функции в точке. Точки разрыва функции и их классификация. Примеры исследования функции на непрерывность.*

Два определения непрерывной функции $y = f(x)$ в точке $x_0$:

- с помощью равенства $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;

- через приращения аргумента и функции;

графические иллюстрации к обоим определениям.

Определение точки разрыва функции.

Признаки разрыва типа выколотой точки, разрыва типа скачка и бесконечного разрыва; графическая иллюстрация точки разрыва каждого типа .

Разрывы I рода (конечные) и разрывы II рода.

Примеры исследования функции на непрерывность.

§9. *Свойства непрерывных функций в точке и на замкнутом промежутке.*

Перестановочность знака предела и знака непрерывной функции.

Непрерывность суммы, разности, произведения, отношения и суперпозиции непрерывных функций.

Непрерывность основных элементарных функций.

Непрерывность элементарных функций.

Непрерывность обратной функции.

Основные свойства функций, непрерывных на замкнутом отрезке и графические иллюстрации к ним:

- теорема о наибольшем и наименьшем значениях функции (теорема Вейерштрасса);

- ограниченность функции, непрерывной на замкнутом отрезке;

- теорема о промежуточных значениях функции (теорема Больцано-Коши);

- следствие о нулях непрерывной функции.

§10. *Техника вычисления пределов и приемы раскрытия основных неопределенностей.*

Вычисление предела непрерывной функции.

Правила раскрытия следующих неопределенностей:

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ при $x \to \infty$, образованная делением многочленов или иррациональных функций;

$\left[\frac{0}{0}\right]$ при $x \to a$, образованная делением алгебраических функций;

$\left[\frac{0}{0}\right]$, образованная делением трансцендентных функций;

неопределенности типа $[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]$, $[1^{\infty}]$.

## 4.2 Описание практической части модуля, формы контроля

В результате изучения темы модуля нужно уметь:

- вычислять пределы последовательностей и функций, раскрывать неопределенности основных типов;
- сравнивать бесконечно малые функции;
- исследовать функции на непрерывность;
- читать по графику функции её предельное поведение при условии $x \to a$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Для этого следует разбирать примеры, приводимые в учебниках и конспектах для иллюстрации теоретических положений, разобрать примеры решения основных задач из практических пособий, активно участвовать в аудиторных практических занятиях и выполнять задания для самостоятельной работы, рекомендованные преподавателем. С целью корректирования и расширения умений и навыков по теме, а также для реализации обратной связи в аудитории рекомендуется проводить и интерактивной форме две самостоятельные работы: по пределам последовательностей и по пределам функций непрерывного аргумента.

Основной формой контроля по практической части модуля является контрольная работа, примерный вариант которой для очной формы обучения приводится ниже.

*Контрольная работа «Пределы и непрерывность функций одной переменной»*

*Задание* 1. Вычислите пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x)$; каждый ответ проиллюстрируйте возможным локальным поведением графика функции $y = f(x)$ в окрестности точки $x = a$ и опишите смысл иллюстрации:

1) $\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2-4x-1}\right)$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}$;

3) $\lim\limits_{x \to 2}\left(\frac{x-1}{x^2-3}\right)^{\frac{1}{x^2-4}}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0}\frac{2^{x+1}-2}{\ln(1+x+x^2)}$.

*Задание* 2. Сравните две бесконечно малые функции при $x \to a$:

1) $\alpha(x) = \sin^2(x-2)$, $\beta(x) = \sqrt{6-x} - 2$, $a = 2$;

2) $\alpha(x)=\left(2x^2-x-1\right)\sin x$, $\beta(x)=\cos x-\cos 1$, $a=1$.

*Задание* 3. Проведите исследование функции на непрерывность, проиллюстрируйте поведение ее графика в окрестности каждой точки разрыва; в 1) постройте график полностью:

$$1)\quad y=f(x):\left[\begin{array}{l} y=x^2,\quad x\le 1 \\ y=2,\quad 1<x<3 \\ y=x-1,\quad x>3 \end{array}\right. \qquad 2)\quad y=\frac{x^3-1}{x-4}.$$

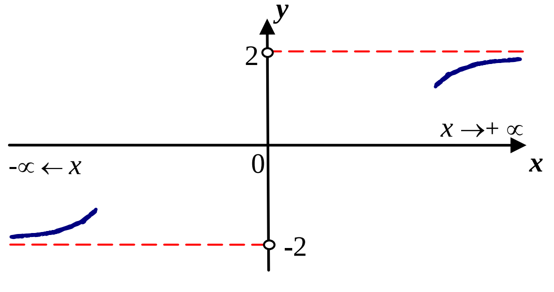
*Задание* 4. Используя строгое определение предела функции по Коши (на языке "$\varepsilon-\delta$" ), докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{1}{2}$.

*Ответы к задачам 0 варианта КР «Пределы и непрерывность функций одной переменной»*

*Задание* 1

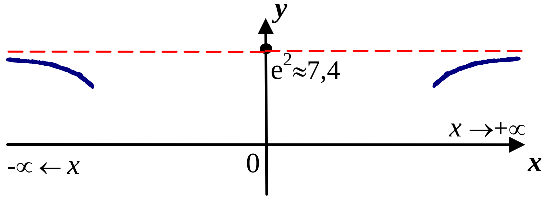
1)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4x-1}\right)=\left[\begin{array}{ll} 2,\text{если} & x\to+\infty \\ -2,\text{если} & x\to-\infty \end{array}\right.$$



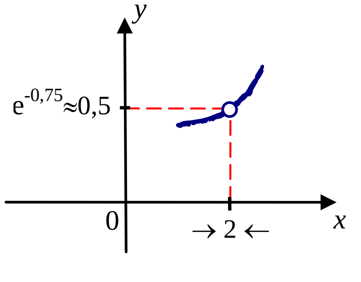

значения функции $f(x)=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4x-1}$ становятся сколь угодно близкими к числу 2 при достаточно больших положительных значениях $x$ и становятся сколь угодно близкими к числу -2 при достаточно больших по модулю отрицательных значениях $x$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}=e^2\approx 7,4$



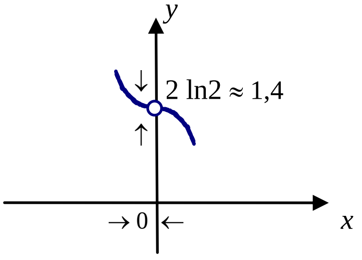

значения функции $f(x)=\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}$ становятся сколь угодно близкими к числу $e^2$, если значения аргумента $x$ будут достаточно большими по модулю.

3) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-1}{x^2-3}\right)^{\frac{1}{x^2-4}}=e^{-\frac{3}{4}}\approx 0,5$




значения функции $f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x^2-3}\right)^{\frac{1}{x^2-4}}$ сколь угодно мало отличаются от числа $e^{-\frac{3}{4}}$ для значений аргумента $x$, достаточно близких к числу 2 (но $x=2\notin ООФ\Rightarrow f(2)$ не существует).

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x+1}-2}{\ln(1+x+x^2)}=2\ln 2\approx 1,4$




значения функции $f(x)=\dfrac{2^{x+1}-2}{\ln(1+x+x^2)}$ сколь угодно мало отличаются от числа $2\ln 2$, если значения аргумента $x$ будут достаточно близкими к числу 0

(но $x=0\notin ООФ\Rightarrow f(0)$ не существует).

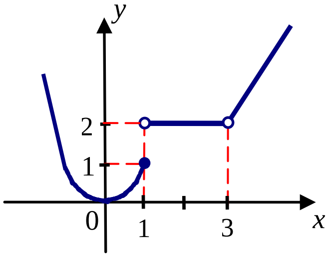
*Задание* 2

1) $\alpha(x)=o\big(\beta(x)\big)$ при $x\to 2$, то есть бесконечно малая функция $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с бесконечно малой функцией $\beta(x)$ при $x\to 2$;

2) $\alpha(x)=O\big(\beta(x)\big)$ при $x\to 1$, то есть бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to 1$ имеют одинаковый порядок малости.

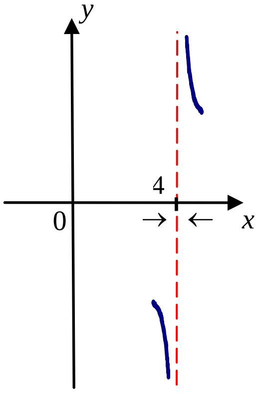
*Задание* 3

1)




Функция $y=f(x)$ является непрерывной при $\forall x\in(-\infty;1)$, $\forall x\in(1;3)$ и $\forall x\in(3;+\infty)$; при $x=1$ функция имеет разрыв типа скачка, при $x=3$ – разрыв типа выколотой точки.

2)




Функция $y=\dfrac{x^3-1}{x-4}$ является непрерывной при $\forall x\in(-\infty;4)$ и при $\forall x\in(4;+\infty)$, имеет бесконечный разрыв в точке $x=4$.

*Задание* 4

Данный предел является верным: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{1}{2}$, так как выполняется определение по Коши конечного предела функции в конечной точке:

$$\forall\ 0<\varepsilon<0,5\ \ \exists\ \ \delta(\varepsilon)=\ln\frac{\varepsilon+0,5}{0,5-\varepsilon}\ \ \Big/\ \ \left|\frac{1}{e^x+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon\quad \text{при}\ \forall x:0<|x|<\delta\ .$$

*Критерии оценивания контрольной работы*

| | |
|---|---|
| Уровень «отлично» | Контрольная работа выполнена полностью, допущенные негрубые ошибки и недочеты исправлены в режиме доработок. Сформированы необходимые умения, успешно и систематически применяются навыки по решению основных практических задач, относящихся к указанной дисциплине. |
| Уровень «хорошо» | Контрольная работа выполнена полностью, допущенные негрубые ошибки и недочеты исправлены в режиме доработок, но выбор методов решения неуверенный и обоснования шагов в решениях недостаточны. Сформированы в целом успешные, но содержащее отдельные пробелы умения и навыки по решению основных практических задач, относящихся к указанной дисциплине. |
| Уровень «удовлетворительно» | В контрольной работе допущены грубые ошибки и (или) недочеты, исправленные после рецензии преподавателя. Студент владеет основными обязательными умениями по проверяемым темам. В целом успешное, но не систематическое применение навыков по решению основных практических задач, относящихся к указанной дисциплине. |
| Уровень «неудовлетворительно» | Контрольная работа не выполнена. Умения и навыки по решению основных практических задач, относящихся к указанной дисциплине, не сформированы на должном уровне. |

### 4.3 Список вопросов самопроверки по теоретической части модуля

*Сформулируйте определения следующих понятий или смысл терминов*:

1) числовая последовательность;
2) предел числовой последовательности;
3) сходящаяся последовательность;
4) бесконечно большая последовательность;
5) бесконечно малая последовательность;
6) монотонно возрастающая последовательность;
7) монотонно убывающая последовательность;
8) неубывающая последовательность;
9) невозрастающая последовательность;
10) стационарная последовательность;
11) ограниченная сверху последовательность;
12) ограниченная снизу последовательность;
13) ограниченная последовательность;
14) неограниченная последовательность;
15) число $e$;
16) конечный предел функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ на языке последовательностей (определение по Гейне);

17) конечный предел функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ на языке окрестностей (определение по Коши);
18) односторонние пределы функции в точке $x = a$;
19) конечный предел функции при $x \to \infty$;
20) ограниченная функция на множестве *X*;
21) локально ограниченная функция при $x \to a$;
22) бесконечно большая функция при $x \to a$ или при $x \to \infty$;
23) бесконечно малая функция при $x \to a$ или при $x \to \infty$;
24) неопределенность, тип неопределенности;
25) замечательные пределы;
26) первый замечательный предел;
27) второй замечательный предел;
28) непрерывная функция в точке $x_0$;
29) точка разрыва функции;
30) разрыв типа выколотой точки;
31) разрыв типа «скачок»;
32) бесконечный разрыв;
33) конечные разрывы, или разрывы I рода;
34) разрывы II рода;
35) непрерывная функция на промежутке;
36) б.м. $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем б.м. $\beta(x)$, при $x \to a$;
37) б.м. $\alpha(x)$ имеет более низкий порядок малости, чем б.м. $\beta(x)$, при $x \to a$;
38) б.м. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют одинаковый порядок малости при $x \to a$;
39) эквивалентные бесконечно малые функции при $x \to a$;
40) список основных теоретических соотношений эквивалентности бесконечно малых функций.

*Сформулируйте следующие теоремы, свойства или правила*:

1) основные свойства пределов последовательностей;
2) теорема о связи сходящейся последовательности с ее пределом и бесконечно малой последовательностью;
3) теорема Вейерштрасса о пределе ограниченной монотонной последовательности;
4) связь односторонних пределов функции в некоторой точке с её обычным пределом в этой же точке;

5) основные свойства бесконечно малых, бесконечно больших и локально ограниченных функций;
6) основная теорема о конечном пределе функции (связь функции, ее конечного предела и бесконечно малой функции);
7) теоремы о конечных пределах функции;
8) теоремы о предельном переходе в равенствах и неравенствах;
9) теорема о пределе промежуточной («зажатой») функции;
10) теорема о замене эквивалентных бесконечно малых;
11) свойства непрерывных функций в точке;
12) основные свойства функций, непрерывных на замкнутом отрезке;
13) правила раскрытия основных неопределенностей.

При ответах на вопросы самопроверки рекомендуется сформировать глоссарий терминов по теме модуля, который далее будет полезен при подготовке к промежуточной аттестации, а также при использовании теоретических фактов темы при изучении дисциплин естественнонаучного профиля.

# 5 Модуль 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной и его основные приложения

## 5.1 Описание теоретической части модуля

Модулем «Дифференциальное исчисление функций одной переменной и его основные приложения» начинается изучение большого и основного раздела дисциплины «Математический анализ», который называется «Дифференциальное и интегральное исчисление». Функция одной переменной (ФОП) описывает функциональную зависимость одной скалярной (т.е. числовой) переменной от одной скалярной переменной. ФОП является простейшей из всех возможных функциональных зависимостей. Основными понятиями этого модуля являются понятия производной и дифференциала функции. Эти понятия следует тщательно разобрать, выучить их определения, усвоить геометрические трактовки, научиться применять в случаях, описанных в модуле.

С целью определения рамок изучения темы ниже приводится список параграфов темы, в котором после названия каждого параграфа даётся его подробное содержание. Обучающимся рекомендуется составить свой краткий конспект по теоретической части темы в соответствии с подробным содержанием её параграфов.

§1. *Производная функции одной переменной: определение, геометрическая и физическая трактовки*.

Подробная и краткая формулировки определения производной функции одной переменной, геометрическая иллюстрация к этому определению.

Примеры вычисления производной по определению.

Физический (механический) смысл производной.

Определения дифференцируемой функции, точки дифференцирования, операции дифференцирования функции.

Понятие о бесконечной производной и её геометрическая трактовка.

§2. *Связь понятий непрерывности и дифференцируемости функции в точке*.

Определение непрерывности функции в точке на языке приращений аргумента и функции.

Определение дифференцируемости функции в точке.

Теорема о связи непрерывности функции в точке с её дифференцируемостью в этой точке (формулировка и доказательство). Следствие об отсутствии свойства дифференцируемости функции в точке разрыва. Примеры непрерывных, но не дифференцируемых функций.

Формулировка логической связи понятий непрерывности и дифференцируемости функции в точке на языке необходимых и достаточных условий.

§3. *Основные правила дифференцирования функций*.

Производная постоянной функции.

Теоремы о производной суммы, произведения и отношения двух функций.

Теорема о производной сложной функции («правило цепочки»).

Теорема о дифференцировании обратной функции.

Правило дифференцирования функций, заданных неявно.

Формула для дифференцирования функций, имеющих параметрическое задание.

Логарифмическое дифференцирование. Понятие о степенно-показательной функции, ее ООФ и способе дифференцирования.

§4. *Производные основных элементарных функций*.

Вывод формул для производных основных элементарных функций:

– степенной функции $y = x^n$, где $n \in \mathbb{N}$;

– показательной функции $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$;

– логарифмической функции $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$;

– тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

–обратных тригонометрических функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$;

– гиперболических функций $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$.

Таблица производных.

Непосредственное дифференцирование как способ нахождения производных явно заданных функций с помощью таблицы производных и основных правил дифференцирования (примеры).

§5. *Основные теоремы о дифференцируемых функциях.*

Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции).

Теорема Ролля (о нулях производной дифференцируемой функции).

Теорема Лагранжа (теорема о конечных приращениях дифференцируемой функции); формула конечных приращений Лагранжа; признак постоянства функции.

Теорема Коши (обобщение теоремы Лагранжа на две дифференцируемые функции).

§6. *Теорема Лопиталя. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя.*

Формулировка и доказательство теоремы Лопиталя для случая $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Распространение теоремы Лопиталя на случай $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ и на случай $x\to\infty$.

Формулировка правила Лопиталя.

Примеры раскрытия неопределенностей $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty-\infty]$, $[0\cdot\infty]$, $\left[1^{\infty}\right]$, $\left[0^{0}\right]$, $\left[\infty^{0}\right]$ с помощью правила Лопиталя.

§7. *Уравнения касательной и нормали к плоской кривой.*

Определения касательной и нормали к плоской кривой в её фиксированной точке.

Уравнения касательной и нормали как уравнения пучка прямых.

Нахождение углового коэффициента касательной по геометрическому смыслу производной.

Нахождение углового коэффициента нормали по условию перпендикулярности прямых на плоскости.

Примеры решения задач на касательную и нормаль к плоским линиям, являющимся графиками функций, заданных явно, неявно или параметрически.

Определение и вычисление угла между плоскими линиями в точке их пересечения.

§8. *Дифференциал функции: определение, геометрическая трактовка, основные свойства, применение.*

Определение дифференциала как главной части приращения дифференцируемой функции.

Геометрическая трактовка дифференциала и следствие из неё о линейности в «малом» физических процессов, описываемых дифференцируемыми функциями.

Основные свойства дифференциала:

– точная и приближенная формулы связи дифференциала с приращением функции;
– дифференциал независимой переменной;
– производная функции как отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента;
– правила вычисления дифференциалов постоянной функции, суммы, произведения и отношения двух функций;
– инвариантность формы дифференциала.

Применение дифференциала к приближенному вычислению значений функции и к вычислению погрешностей.

§9. *Производные и дифференциалы высших порядков.*

Определение производных 2-го, 3-го, … , $n$-го порядков функции $y = f(x)$, их обозначение и примеры вычисления для функций, заданных явно или заданных параметрически.

Физическая трактовка производной второго порядка.

Определение дифференциалов 2-го, 3-го, … , $n$-го порядков, вывод формул для их вычисления.

Связь производной $n$-го порядка с дифференциалом $n$-го порядка.

Невыполнение свойства инвариантности формы для дифференциалов высших порядков.

§10. *Монотонность и экстремумы функции: определения, необходимые и достаточные условия.*

Определения монотонно возрастающей или монотонно убывающей функции на интервале. Понятие о строгой и нестрогой монотонности.

Достаточное условие монотонности дифференцируемой функции. Понятие о кусочно-монотонной функции.

Определение точки максимума, точки минимума и локальных экстремумов функции.

Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции и его недостаточность.

Определение критической точки функции (точки, подозрительной на локальный экстремум), понятие стационарной точки функции.

Первое достаточное условие локального экстремума дифференцируемой функции.

Примеры исследования функции на монотонность и локальные экстремумы.

§11. *Второе достаточное условие локального экстремума функции. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на замкнутом промежутке.*

Формулировка и доказательство второго достаточного условия локального экстремума дважды дифференцируемой функции; примеры.

Определение наибольшего и наименьшего значений функции на заданном множестве (глобальных экстремумов функции).

Достаточное условие для существования наибольшего и наименьшего значений функции на замкнутом промежутке (теорема Вейерштрасса).

Алгоритм нахождения глобальных экстремумов функции на отрезке, примеры.

§12. *Выпуклость, вогнутость плоской линии, точки перегиба: определения, необходимые и достаточные условия*.

Геометрические определения выпуклой (выпуклой вверх) и вогнутой (выпуклой вниз) линии на интервале. Определение точки перегиба. Геометрические иллюстрации.

Достаточное условие для выпуклости (вогнутости) графика дважды дифференцируемой функции.

Необходимое условие для точки перегиба и его недостаточность.

Определение точки, подозрительной на перегиб (критической точки функции по ее второй производной).

Достаточное условие точки перегиба. Примеры исследования функции на выпуклость, вогнутость, точки перегиба.

§13. *Асимптоты линии. Нахождение вертикальных, наклонных и горизонтальных асимптот графика функции.*

Определение бесконечной ветви плоской линии.

Определение асимптоты плоской линии, имеющей бесконечную ветвь, иллюстрации к определению.

Нахождение вертикальных асимптот графика функции $y = f(x)$.

Нахождение наклонных (горизонтальных) асимптот графика функции $y = f(x)$ в виде уравнения $y = kx + b$, вывод формул для вычисления чисел $k$ и $b$.

Понятие односторонних асимптот.

Примеры нахождения асимптот линий $y = f(x)$.

§14. *Формулы Тейлора и Маклорена*.

Постановка задачи о локальном приближении дифференцируемой функции целым многочленом (полиномом).

Вывод формул для коэффициентов многочлена Тейлора.

Запись формулы Тейлора $n$-го порядка для функции $f(x)$ в окрестности точки $x_0$.

Формула Маклорена как частный случай формулы Тейлора при $x_0 = 0$.

Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано и в форме Лагранжа.

Формулы Маклорена для функций $y = e^x$, $y = \cos x$, $y = \sin x$ и их применение.

### 5.2 Описание практической части модуля, формы контроля

В практической части модуля нужно овладеть следующими умениями и навыками:

- техника дифференцирования функций, заданных явно, заданных неявно или имеющих параметрическое задание; приём логарифмического дифференцирования;
- применение производных для раскрытия неопределенностей (правило Лопиталя);
- применение производных для полного исследования функций одной переменной и построения их графиков;
- решение задач на уравнения касательной и нормали к плоской кривой;
- решение задач (в том числе, текстовых задач) на нахождение наибольшего и (или) наименьшего значения функции.

Для этого следует разбирать примеры, приводимые в учебниках и конспектах для иллюстрации теоретических положений, разобрать примеры решения основных задач из практических пособий, активно участвовать в аудиторных практических занятиях и выполнять задания для самостоятельной работы, рекомендованные преподавателем. С целью корректирования и расширения умений и навыков по теме, а также для реализации обратной связи в аудитории рекомендуется проводить и интерактивной форме самостоятельную работу по технике дифференцирования и простейшим приложениям производной.

Основной формой контроля по практической части модуля является расчетно-графическая работа на основные приложения дифференциального и интегрального исчислений ФОП, примерный вариант которой для очной формы обучения приводится в описании практической части следующего модуля дисциплины.

### 5.3 Список вопросов самопроверки по теоретической части модуля

*Сформулируйте определения следующих понятий или смысл терминов*:

1) касательная к плоской кривой;
2) производная функции $y = f(x)$;
3) производная *n*-го порядка функции $y = f(x)$, $n = 2,3....$;
4) монотонно возрастающая функция на промежутке $x \in (a;b)$;
5) монотонно убывающая функция на промежутке $x \in (a;b)$;
6) точка локального максимума функции;
7) точка локального минимума функции;
8) локальные максимум и минимум функции;
9) выпуклая линия на промежутке $x \in (a;b)$;
10) вогнутая линия на промежутке $x \in (a;b)$;
11) точка перегиба линии;

12) асимптота линии;
13) дифференциал функции;
14) точка дифференцирования;
15) дифференцирование функции;
16) дифференцируемая функция;
17) нормаль к плоской кривой в ее точке $M_0$;
18) геометрический смысл производной;
19) механический (физический) смысл производной;
20) логарифмическое дифференцирование;
21) угол между линиями $L_1$ и $L_2$;
22) критические точки функции по ее первой производной (точки «подозрительные на экстремум» точки);
23) острый экстремум функции;
24) критические точки функции по ее второй производной («подозрительные на перегиб»);
25) глобальные экстремумы (наибольшее и наименьшее значения) функции на промежутке;
26) инвариантность формы дифференциала функции;
27) геометрический смысл дифференциала функции.

*Запишите следующие формулы и поясните входящие в них обозначения:*

1) дифференцирование суммы функции;
2) дифференцирование произведения функции;
3) дифференцирование дроби;
4) дифференцирование сложной функции;
5) дифференцирование функции, имеющей параметрическое задание;
6) производная степенной функции;
7) производная показательной функции;
8) производная логарифмической функции;
9) производные тригонометрических функций;
10) производные обратных тригонометрических функций;
11) производные гиперболических функций;
12) вычисление дифференциала функции;
13) формулы связи между приращением функции и ее дифференциалом;
14) формулы для вычисления дифференциала суммы, произведения и отношения двух функций;
15) формула Лагранжа для конечных приращений функции.

16) формула Тейлора;
17) формула Маклорена;
18) формула Лагранжа для остаточного члена формулы Тейлора;
19) формула Пеано для остаточного члена формулы Тейлора;
20) формула Маклорена для функции $y = e^x$.

*Сформулируйте следующие теоремы, свойства или правила*:

1) теорема о связи непрерывности функции с ее дифференцируемостью;
2) основные правила дифференцирования;
3) правило Лопиталя;
4) теорема Ролля (о нулях производной);
5) теорема Лагранжа (о конечных приращениях функции);
6) достаточное условие монотонности функции на промежутке;
7) необходимое условие существования локального экстремума функции;
8) первое достаточное условие существования локального экстремума функции;
9) второе достаточное условие существования локального экстремума функции;
10) достаточное условие выпуклости или вогнутости линии;
11) необходимое условие для точки перегиба;
12) достаточное условие для точки перегиба;
13) правило нахождения вертикальных асимптот графика функции $y = f(x)$;
14) правило нахождения наклонных (горизонтальных) асимптот графика функции $y = f(x)$;
15) правило дифференцирования неявной функции;
16) основные свойства дифференциала функции.

При ответах на вопросы самопроверки рекомендуется сформировать глоссарий терминов по теме модуля, который далее будет полезен при подготовке к промежуточной аттестации, а также при использовании теоретических фактов темы при изучении дисциплин естественнонаучного профиля.

# 6 Модуль 4. Интегральное исчисление функций одной переменной и его основные приложения

## 6.1 Описание теоретической части модуля

Основными объектами изучения в этом модуле являются следующие понятия: неопределенный интеграл, определенный интеграл, несобственные интегралы первого и второго рода, интегралы, зависящие от параметра. Эти понятия так же, как и понятия предыдущих двух модулей, относятся к основным структурам математического анализа и далее обобщаются на функции нескольких переменных. Поэтому следует тщательно разобрать и выучить их определения, усвоить геометрические трактовки, научиться применять в случаях, описанных в модуле.

С целью определения рамок изучения темы ниже приводится список параграфов темы, в котором после названия каждого параграфа даётся его подробное содержание. Обучающимся рекомендуется составить свой краткий конспект по теоретической части темы в соответствии с подробным содержанием её параграфов.

§1. *Первообразная и неопределенный интеграл: определения, основные свойства. Таблица неопределенных интегралов*.

Определение первообразной для данной функции, основное свойство первообразных.

Определение неопределенного интеграла, достаточное условие существования, геометрическая трактовка.

Основные свойства неопределенного интеграла:

- о производной неопределенного интеграла;
- о рядом стоящих знаках интеграла и дифференциала;
- линейность по подынтегральной функции.

Таблица неопределенных интегралов, примеры табличного интегрирования.

Общие замечания о вычислении неопределенных интегралов.

§2. *Замена переменной интегрирования и метод интегрирования по частям*.

Подведение под знак дифференциала постоянного слагаемого, постоянного множителя, части подынтегральной функции.

Формальное описание замены переменной интегрирования (метода подстановки), примеры.

Формула интегрирования по частям, её вывод и примеры использования.

Основные типы интегралов, которые вычисляются методом интегрирования по частям.

§3. *Рациональные функции. Интегрирование рациональных дробей*.

Определения рациональной функции (рациональной дроби), правильной и неправильной рациональной дроби, примеры.

Основные свойства рациональных дробей:

- представление неправильной рациональной дроби в виде суммы целого многочлена и правильной рациональной дроби;
- простейшие рациональные дроби вида I, II, III, IV и их интегрирование;
- разложение любой правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей; метод неопределенных коэффициентов.

Правило интегрирования любой рациональной дроби, примеры.

§4. *Интегралы от некоторых тригонометрических и от некоторых иррациональных функций.*

Интегралы от произведения синуса и косинуса разных аргументов: $\int \begin{bmatrix} \cos\alpha x \\ \sin\beta x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin\alpha x \\ \cos\beta x \end{bmatrix} \cdot dx$.

Интегралы от произведения степеней от синуса и косинуса одного аргумента: $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \cdot dx$.

Интегралы от натуральных степеней тангенса и котангенса: $\int \mathrm{tg}^n x \cdot dx,\ \int \mathrm{ctg}^n x \cdot dx,\ n = 1, 2, 3, \dots$.

Интегралы от рациональной функции относительно cos $x$ и sin $x$: $\int R(\cos x, \sin x) \cdot dx$.

Интегралы от рациональной функции относительно $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$: $\int R(\cos^2 x, \sin^2 x) \cdot dx$.

Вычисление интегралов вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \cdot dx$.

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[\alpha]{ax+b}, \sqrt[\beta]{ax+b}, \dots, \sqrt[\gamma]{ax+b}\right) \cdot dx$

Интегралы, в которых иррациональности уничтожаются тригонометрическими подстановками: $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx$.

§5. *Определение определённого интеграла, его геометрическая и механическая трактовки, достаточные условия существования.*

Основные задачи, приводящие к понятию определённого интеграла:

- механическая задача о массе неоднородного стержня;
- геометрическая задача о площади криволинейной трапеции;

Полное и краткое определения определённого интеграла.

Геометрическая и механическая трактовки определенного интеграла от неотрицательной функции.

Формулировка достаточных условий интегрируемости функций на заданном промежутке.

§6. *Связь определённого интеграла с неопределенным интегралом (теорема Барроу, формула Ньютона-Лейбница).*

Формулировка и доказательство теоремы Барроу (о дифференцировании определенного интеграла по переменному верхнему пределу).

Следствия из теоремы Барроу:

- интеграл с переменным верхним пределом как одна из первообразных подынтегральной функции;
- дифференцирование определенного интеграла по параметру, от которого зависит верхний предел интегрирования;

– дифференциал площади криволинейной трапеции.

Вывод формулы Ньютона-Лейбница и примеры ее использования.

§7. *Основные свойства определенного интеграла*.

Формулировка и обоснование следующих свойств определенного интеграла:

- линейность по подынтегральной функции;
- аддитивность по промежутку интегрирования;
- о перестановке пределов интегрирования;
- о значении определенного интеграла с равными пределами интегрирования;
- об интегрировании неравенств;
- о значении определенного интеграла от функции, тождественно равной единице;
- оценки значения определенного интеграла;
- теорема о среднем.

Примеры использования свойств определенного интеграла.

§8. *Формула интегрирования по частям и замена переменной интегрирования в определённом интеграле.*

Вывод формулы интегрирования по частям, примеры её использования.

Формулировка и доказательство правила замены переменной.

Примеры вычисления определенных интегралов методом замены переменной интегрирования с пересчетом пределов интегрирования.

§9. *Вычисление площади плоской фигуры с помощью определённого интеграла в декартовых и в полярных координатах.*

Определение правильной плоской фигуры в заданном направлении.

Формулы для вычисления площади плоской фигуры в декартовых координатах.

Определение криволинейного сектора.

Вывод формулы для вычисления площади криволинейного сектора.

Примеры вычисления площадей.

§10. *Вычисление объёма тела вращения с помощью определенного интеграла. Общая методика приложений определенного интеграла.*

Определение тела вращения, примеры.

Вывод формулы для вычисления объема тела, получающегося вращением криволинейной трапеции вокруг оси $Ox$ (вокруг оси $Oy$). Примеры.

Формула для вычисления объема тела с известной площадью поперечного сечения.

Изложение общей методики приложений определенного интеграла (в двух формах).

§11. *Вычисление длины дуги плоской кривой. Дифференциал длины дуги*.

Определение длины дуги плоской кривой. Вывод формулы для вычисления длины дуги, заданной функцией $y = y(x)$, $x \in [a; b]$. Примеры вычисления.

Дифференциал длины дуги: инвариантная форма записи, формула для вычисления, геометрическая трактовка.

Формулы для вычисления длины дуги плоской кривой при различных способах ее задания (в том числе при параметрическом задании и в полярной системе координат). Примеры вычислений.

§12. *Несобственные интегралы I рода: определения, геометрические трактовки, достаточные условия сходимости или расходимости.*

Подход к понятию несобственного интеграла. Определение несобственных интегралов $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, их сходимости и расходимости; геометрические иллюстрации; примеры.

Достаточные признаки сходимости или расходимости, основанные на сравнении подынтегральных функций (формулировки признаков, иллюстрации к ним, примеры).

Понятие абсолютной сходимости, признак абсолютной сходимости (формулировка, иллюстрации).

§13. *Несобственные интегралы II рода: определения, геометрические трактовки, достаточные условия сходимости или расходимости.*

Определения несобственных интегралов от функций, имеющих разрывы второго рода на левом конце или на правом конце или внутри конечного промежутка интегрирования, их сходимости и расходимости; геометрические иллюстрации, примеры.

Достаточные признаки сходимости или расходимости, основанные на сравнении подынтегральных функций (формулировки признаков, иллюстрации к ним, примеры).

Понятие абсолютной сходимости, признак абсолютной сходимости (формулировка, иллюстрации).

§14. *Интегралы, зависящие от параметра.*

Определение интеграла, зависящего от параметра; примеры.

Основные свойства определенных интегралов, зависящих от параметра:

- непрерывность по параметру;
- дифференцирование по параметру (правило Лейбница).

Несобственные интегралы, зависящие от параметра (на примере интеграла $\int\limits_0^{+\infty} f(x,\lambda)dx$): определение правильной сходимости; основные свойства правильно сходящихся несобственных интегралов (их непрерывность и дифференцируемость по параметру).

Понятие о гамма-функции: определение, основные свойства, график.

## 6.2 Описание практической части модуля, формы контроля

В практической части модуля нужно овладеть следующими умениями и навыками:

- техникой табличного интегрирования;
- методами замены переменной интегрирования и интегрирования по частям как основными методами сведения неопределенных интегралов к табличным интегралам;
- вычислением определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница;
- методикой приложения определенных интегралов (на примере решения геометрических задач о площади плоской фигуры, об объеме тела вращения, о длине дуги плоской кривой);
- работой с несобственными интегралами I и II рода;
- иметь представление о работе с интегралами, зависящими от параметра.

Для этого следует разбирать примеры, приводимые в учебниках и конспектах для иллюстрации теоретических положений, разобрать примеры решения основных задач из практических пособий, активно участвовать в аудиторных практических занятиях и выполнять задания для самостоятельной работы, рекомендованные преподавателем. С целью корректирования и расширения умений и навыков по теме, а также для реализации обратной связи в аудитории рекомендуется проводить и интерактивной форме самостоятельную работу по технике интегрирования.

Основной формой контроля по практической части модуля является расчетно-графическая работа (РГР), включающая задачи на основные приложения дифференциального и интегрального исчислений ФОП. Примерный вариант РГР для очной формы обучения приводится ниже.

*Расчетно-графическая работа «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной»*

*Задание* 1

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = \dfrac{x^2}{e^x} + 1$;  2) $y = (x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$;  3) $y = \dfrac{x^2+5}{x-1}$.

*Задание* 2

Найти соотношение между радиусом $R$ и высотой $H$ цилиндра, имеющего при данном объеме $V$ наименьшую площадь полной поверхности.

*Задание* 3

Используя связь между приращением дифференцируемой функции и её дифференциалом, вычислите приближенное значение $f(1{,}05)$, если $f(x)=e^{0,1x(1-x)}$. Проведите вычисление $f(1{,}05)$ с помощью калькулятора, определите погрешность и согласуйте её с теоретической погрешностью приближенного равенства $\Delta f \approx df$ .

*Задание* 4

Баржу, палуба которой на 4 м ниже уровня пристани, подтягивают к ней при помощи каната; при этом канат наматывается на ворот со скоростью 2 м\сек. Определить, с каким ускорением $a$ движется баржа в момент, когда она удалена от пристани на 8 м (по горизонтали).

*Задание* 5

Используя определенный интеграл, вычислите значение $F$ площади каждой плоской фигуры, ограниченной заданными линиями; выполните построение фигуры:

1) $x=(y-2)^3,\ \ x=4y-8;$ 2) $\rho=\dfrac{1}{3}\varphi,\ \ \varphi\in\left[2\pi;3\pi\right]\ ,\ \ \rho=\pi,$ полярная ось;

3) $\begin{cases} x=8\cos^3 t \\ y=4\sin^3 t \end{cases},\ \ x=3\sqrt{3},\ \ (x\ge 3\sqrt{3}).$

*Задание* 6

Вычислите значение $V$ объема тела, которое получается вращением вокруг указанной оси ($l$) плоской фигуры $D$, ограниченной заданными линиями; сделайте чертёж фигуры $D$ и рисунок искомого объема:

1) $y^2=4-x,\ \ y=0,\ \ x=-1,\ \ (l)-$ *ось* $Ox$; 2) $y=\arccos\dfrac{x}{3},\ \ y=\arccos x,\ \ y=0,\ \ (l)-$ *ось* $Oy$

*Задание* 7

Вычислите значение $l$ длины дуги заданной линии; приведите иллюстративный чертеж:

1) $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x,\ \ 1\le x\le 2;$ 2) $\rho=6\sin\varphi,\ \ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3};$ 3) $\begin{cases} x=6(t-\sin t) \\ y=6(1-\cos t) \end{cases},\ \ \dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{3\pi}{2}.$

*Задание* 8

Вычислите значения несобственных интегралов или исследуйте их сходимость с помощью достаточных признаков; приведите геометрическую иллюстрацию к каждому несобственному интегралу и результату его исследования:

1) $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x-1}}$; 2) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 3) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos x}{x\sqrt{x^2+4}}dx$.

## 6.3 Список вопросов самопроверки по теоретической части модуля

*Сформулируйте определения следующих понятий или смысл терминов:*

1) первообразная функция для функции $f(x)$;
2) неопределенный интеграл от функции $f(x)$;
3) рациональная функция (рациональная дробь);

4) определенный интеграл от функции $f(x)$ по промежутку $x \in [a;b]$;
5) несобственный интеграл I рода;
6) несобственный интеграл II рода;
7) интеграл, зависящий от параметра;
8) геометрическая трактовка неопределенного интеграла;
9) «неберущиеся» неопределенные интегралы;
10) правильная рациональная дробь;
11) неправильная рациональная дробь;
12) простейшие (элементарные) рациональные дроби;
13) метод неопределенных коэффициентов в разложении правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей;
14) универсальная тригонометрическая подстановка;
15) ранг дробления в определении определенного интеграла;
16) интегральная сумма (сумма Римана) в определении определенного интеграла;
17) геометрическая трактовка определенного интеграла;
18) механическая трактовка определенного интеграла;
19) линейность определенного интеграла по подынтегральной функции;
20) аддитивность определенного интеграла по промежутку интегрирования;
21) криволинейная трапеция;
22) криволинейный сектор;
23) тело вращения;
24) длина дуги плоской кривой;
25) дифференциал длины дуги плоской кривой;
26) общая методика приложений определенного интеграла;
27) сходимость несобственных интегралов;
28) расходимость несобственных интегралов;
29) абсолютная сходимость несобственных интегралов;
30) правило Лейбница о дифференцировании по параметру интегралов, зависящих от параметра;
31) правильная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра.

*Запишите следующие формулы и поясните входящие в них обозначения*:

1) определение неопределенного интеграла;
2) основные свойства неопределенного интеграла;

3) таблица основных неопределенных интегралов;
4) подведение под знак дифференциала постоянного множителя, постоянного слагаемого, части подынтегральной функции;
5) замена переменной интегрирования в неопределенном интеграле;
6) формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле;
7) основные типы неопределенных интегралов, которые рекомендуется вычислять по частям;
8) основные типы неопределенных интегралов от тригонометрических функций, для которых известно правило вычисления;
9) основные типы неопределенных интегралов от иррациональных функций, для которых известно правило вычисления;
10) определение определенного интеграла;
11) основные свойства определенного интеграла;
12) формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла;
13) дифференцирование определенного интеграла по переменному верхнему пределу (теорема Барроу);
14) дифференцирование определенного интеграла по параметру, от которого зависит верхний предел интегрирования;
15) формула интегрирования по частям в определенном интеграле;
16) формула замены переменной интегрирования в определенном интеграле;
17) формула для вычисления площади криволинейной трапеции;
18) формулы для вычисления площадей плоских фигур в декартовых координатах;
19) формула для вычисления площади криволинейного сектора в полярных координатах;
20) формулы для вычисления объема тела вращения;
21) формула для вычисления длины дуги плоской кривой, заданной уравнением $y = y(x)$;
22) формула для вычисления длины дуги плоской кривой, заданной уравнением $x = x(y)$;
23) формула для вычисления длины дуги плоской кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$;
24) формула для вычисления длины дуги плоской кривой, заданной уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ в полярной системе координат;
25) формулы, определяющие несобственные интегралы I рода;
26) формулы, определяющие несобственные интегралы II рода;
27) формулы дифференцирования по параметру определенного интеграла, зависящего от параметра (правило Лейбница);
28) формула, определяющая гамма-функцию.

*Приведите формулировки следующих теорем, свойств или правил*:

1) теорема об основном свойстве первообразных;
2) основные свойства неопределенного интеграла;
3) достаточное условие существования неопределенного интеграла;
4) правило замены переменной интегрирования (метод подстановки) в неопределенном интеграле;
5) основные свойства рациональных дробей;
6) правило интегрирования рациональных дробей;
7) достаточные условия интегрируемости функции на заданном промежутке;
8) теорема Барроу;
9) основные свойства определенного интеграла;
10) оценки значений определенного интеграла;
11) теорема о среднем; среднее значение подынтегральной функции на промежутке интегрирования;
12) правило замены переменной в определенном интеграле;
13) достаточные условия сходимости или расходимости несобственных интегралов;
14) основные свойства определенных интегралов, зависящих от параметра;
15) основные свойства правильно сходящихся несобственных интегралов, зависящих от параметра.

При ответах на вопросы самопроверки рекомендуется сформировать глоссарий терминов по теме модуля, который далее будет полезен при подготовке к промежуточной аттестации, а также при использовании теоретических фактов темы при изучении дисциплин естественнонаучного профиля.

# 7 Модуль 5. Дифференциальное и интегральное исчисления функций нескольких переменных и их приложения

## 7.1 Описание теоретической части модуля

Темы «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных» и «Интегральное исчисление функций нескольких переменных» являются обобщением аналогичных тем для функции одной переменной. При математическом моделировании реальных процессов чаще получаются ФНП, так что функции одной переменной можно рассматривать как математическую абстракцию, на которой нужно начинать изучать различные свойства функций. Обобщающий характер содержания этих тем оправдывает большой объём модуля.

Теория ФНП для технических направлений профессиональной подготовки излагается, как правило, на примере функций двух или трёх переменных. Это упрощает записи и допускает некоторые геометрические интерпретации. Но все теоретические факты остаются справедливыми для функций любого конечного количества переменных.

Изучение теории ФНП нужно вести параллельно с повторением аналогичных фактов для функций одной переменной, что значительно способствует пониманию теории в абстрактной форме её построения и выделению теоретических фрагментов, которые относятся сугубо к ФНП. Так определение определенного интеграла от функции одной переменной и его свойства являются исходными для изучения всех интегралов от ФНП. Поэтому вследствие аналогичности в определениях, формулировках, свойствах и в их доказательствах на этапе обобщения можно пропускать подробные выкладки при условии, что они были достаточно поняты для функций одной переменной.

У студентов технических специальностей при изучении этого модуля должен сформироваться общий подход к перечню атрибутов нового математического понятия или новой математической структуры. Это означает, что изучая новое математическое понятие, нужно понимать

- его определение, возможные трактовки,
- основные свойства,
- правило вычисления,
- основные приложения.

Заключительная часть модуля называется «Элементы векторного анализа» и завершает изучение дифференциального и интегрального исчисления ФНП. Основные понятия этой части используются при изучении физики, механики, многих технических дисциплин.

С целью определения рамок изучения тем ниже приводится список параграфов модуля, в котором после названия каждого параграфа даётся его подробное содержание. Учащимся рекомендуется при изучении материала составлять свой краткий конспект по теоретической части модуля, включающий формальную запись основных определений и вычислительных алгоритмов.

*Тема 1. Дифференциальное исчисление ФНП.*

§1. *Определение функции нескольких переменных. Способы задания. Область определения. Графическое изображение функции двух переменных. Линии и поверхности уровня.*

Определение функции двух переменных, примеры.

Способы задания ФНП: аналитический (явный и неявный), табличный.

Область определения функции нескольких переменных (ООФ); примеры нахождения. Понятия замкнутой, открытой, ограниченной области.

График функции двух переменных; примеры построения поверхностей.

Линии уровня и поверхности уровня, их уравнения; примеры построения.

§2. *Предел и непрерывность функций нескольких переменных.*

Определение $\delta$ – окрестности фиксированной точки.

Определение конечного предела функции двух переменных в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Определение ФНП, непрерывной в точке; понятие полного приращения ФНП.

ФНП, непрерывные в области.

Основные свойства непрерывных функций. Примеры.

§3. *Частные приращения и частные производные функции нескольких переменных*.

Определения частных приращений и частных производных ФНП.

Правило вычисления частных производных. Примеры.

Геометрический смысл частных производных функции двух переменных.

Частные производные высших порядков. Основное свойство смешанных частных производных. Примеры.

§4. *Полное приращение и полный дифференциал ФНП. Приложения полного дифференциала.*

Определение полного приращения ФНП и его выражение через частные производные.

Определение дифференцируемой ФНП и ее полного дифференциала.

Связь полного приращения ФНП с ее полным дифференциалом.

Достаточные условия дифференцируемости ФНП в точке.

Применение полного дифференциала ФНП в приближенных вычислениях и оценке погрешностей.

§5. *Производная сложной ФНП. Инвариантность формы полного дифференциала. Полная производная.*

Вывод формулы для дифференцирования сложной ФНП. Примеры.

Инвариантность формы полного дифференциала ФНП.

Полная производная ФНП и вывод формулы для ее вычисления. Примеры.

§6. *Производные функции, заданной неявно.*

Описание и примеры неявно заданной ФНП.

Вывод формулы для вычисления частных производных ФНП, заданной неявно, условия их существования. Примеры.

Использование частных производных для нахождения производной функции одной переменной, заданной неявно. Примеры.

§7. *Формула Тейлора для функции двух переменных.*

Вывод формулы Тейлора второго порядка для функции двух переменных. Пример.

§8. *Локальные экстремумы функции нескольких переменных.*

Определение локальных максимума и минимума функции двух переменных.

Необходимое условие локального экстремума. Критические (стационарные) точки ФНП.

Формулировка достаточного условия локального экстремума для дважды дифференцируемой функции двух переменных. Пример.

§9. *Нахождение глобальных экстремумов ФНП в замкнутой ограниченной области.*

Описание принципиального решения задачи о нахождении наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в замкнутой ограниченной области (на компакте). Пример решения задачи.

Понятие об условных экстремумах ФНП.

§10. *Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.*

Вывод уравнения касательной к пространственной линии $(l)$.

Определения касательной плоскости к поверхности в ее точке $M_0$ и вектора нормали к поверхности.

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $F(x, y, z) = 0$; примеры.

Понятие об особых точках поверхности.

§11. *Скалярное поле. Поверхности и линии уровня. Производная по направлению.*

Определение скалярного поля; примеры.

Уравнения поверхностей (линий) уровня скалярного поля.

Определение производной функции $U(x, y, z)$ по заданному направлению $\vec{s}$, формула для ее вычисления; смысл производной ФНП по направлению; примеры.

§12. *Градиент скалярного поля.*

Определение градиента скалярного поля, пример вычисления.

Основные свойства градиента:

- связь производной по направлению с градиентом;
- геометрический смысл градиента как направления наибольшего возрастания скалярного поля; скорость наибольшего возрастания равна модулю градиента;
- связь градиента с поверхностью уровня.

Примеры скалярных полей и их основных характеристик.

*Тема 2. Интегральное исчисление ФНП.*

§1. *Двойной интеграл: определение, свойства, механическая и геометрическая трактовки.*

Подробное и полное определения двойного интеграла от функции $f(x, y)$ по области $D \subset XOY$. Краткая формулировка определения. Терминология.

Достаточное условие существования.

Основные свойства: линейность по подынтегральной функции; аддитивность по области интегрирования; значение двойного интеграла от функции, тождественно равной единице на области интегрирования; оценки значения двойного интеграла; теорема о среднем значении подынтегральной функции.

Механическая трактовка (масса неоднородной тонкой пластинки).

Геометрическая трактовка (объем цилиндроида).

§2. *Вычисление двойного интеграла в декартовых и в полярных координатах. Формула замены переменных.*

Формула сведения двойного интеграла к повторному интегралу в случае, когда область интегрирования является правильной в направлении оси $OY$. Вывод формулы. Пример. Иллюстрация смысла формулы на объеме цилиндроида с использованием известной формулы для объема тела с известной площадью поперечного сечения.

Формула сведения двойного интеграла к повторному интегралу в случае, когда область интегрирования является правильной в направлении оси $OX$. Пример.

Постановка и решение задачи об изменении порядка интегрирования в повторном интеграле. Пример.

Определение правильной области в полярной системе координат и запись ее системой неравенств.

Формула перевода двойного интеграла из декартовой прямоугольной системы координат к системе полярных координат. Вывод формулы. Пример.

Общая формула замены переменных в двойном интеграле. Функциональный определитель Якоби. Иллюстрация применения формулы случаем полярной замены переменных.

§3. *Тройной интеграл: определение, свойства, механическая трактовка, вычисление в декартовых, в цилиндрических и в сферических координатах*.

Определение тройного интеграла; механическая трактовка; достаточное условие существования.

Основные свойства тройного интеграла: линейность по подынтегральной функции; аддитивность по области интегрирования; значение тройного интеграла от функции, тождественно равной единице на области интегрирования; оценки значения тройного интеграла; теорема о среднем значении подынтегральной функции.

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах. Пример.

Определение цилиндрических координат точки пространства, их связь с декартовыми координатами и границы изменения для всего пространства $\mathbb{R}^3$.

Формула для вычисления тройного интеграла в цилиндрических координатах. Пример.

Определение сферических координат точки пространства, их связь с декартовыми координатами и границы изменения для всего пространства $\mathbb{R}^3$.

Получение бесконечно малого элемента объема в сферических координатах с помощью общей формулы замены переменных в кратных интегралах.

Формула перевода тройного интеграла к сферическим координатам. Пример.

§4. *Приложения двойных и тройных интегралов к задачам геометрии и механики.*

Формула для вычисления площади плоской фигуры с помощью двойного интеграла.

Вычисление объемов с помощью двойного интеграла. Пример.

Вывод формул для вычисления механических характеристик тонкой пластинки:

- массы при неоднородной плотности материала;
- статических моментов относительно различных осей;
- моментов инерции относительно осей и относительно точки;
- координат центра масс.

Примеры решения задач.

Формула для вычисления объемов с помощью тройного интеграла. Пример.

Формула для вычисления массы, распределенной по объему.

Вычисление механических характеристик объемных тел (статических моментов, моментов инерции, координат центра масс). Примеры.

§5. *Криволинейные интегралы I рода: определение, основные свойства, вычисление, основные приложения.*

Определение криволинейного интеграла I рода (криволинейного интеграла по длине дуги), механическая трактовка как массы тяжелой линии.

Основные свойства: линейность по подынтегральной функции; аддитивность по линии интегрирования; значение криволинейного интеграла I рода от функции, тождественно равной единице на линии интегрирования; достаточное условие существования.

Формула сведения криволинейного интеграла I рода к определенному интегралу в случае параметрического задания линии интегрирования. Примеры.

Основные приложения: вычисление длины дуги, массы и других механических характеристик линии.

§6. *Криволинейные интегралы II рода: определение, физическая трактовка, основные свойства, вычисление.*

Общий вид криволинейного интеграла II рода (криволинейного интеграла по координатам) в трехмерном и в двумерном случаях. Подробное определение в двумерном случае. Обозначение криволинейного интеграла по замкнутому контуру.

Физическая трактовка – работа переменной силы на криволинейном перемещении.

Основные свойства: линейность по подынтегральному выражению; аддитивность по линии интегрирования; зависимость от направления на линии интегрирования; достаточное условие существования.

Формулы сведения криволинейного интеграла II рода к определенному интегралу в случае параметрического задания линии интегрирования $(l)$, а также в двумерном случае, когда уравнение $(l)$ имеет вид $y = y(x)$ или $x = x(y)$. Примеры.

§7. *Формула Грина. Вычисление площади плоской фигуры с помощью криволинейного интеграла II рода.*

Запись формулы Грина, ее описание и вывод.

Вычисление площади плоской фигуры с помощью криволинейного интеграла II рода по замкнутому контуру границы фигуры. Пример.

§8. *Условия независимости криволинейного интеграла II рода от формы линии интегрирования.*

Формулировки теоремы о необходимых и достаточных условиях независимости криволинейного интеграла II рода от формы линии интегрирования (в двумерном и в трехмерном случаях).

Полное доказательство теоремы в двумерном случае.

Примеры вычисления криволинейных интегралов II рода, не зависящих от формы линии интегрирования.

§9. *Восстановление функции нескольких переменных по ее полному дифференциалу.*

Постановка задачи, проверка корректности постановки.

Решение задачи с помощью криволинейного интеграла II рода, проверка и запись ответа. Примеры.

§10. *Поверхностные интегралы I рода: определение, основные свойства, вычисление, некоторые приложения.*

Определение, механическая трактовка.

Основные свойства: линейность по подынтегральной функции; аддитивность по поверхности интегрирования; значение в случае, когда подынтегральная функция равна единице на поверхности интегрирования; достаточное условие существования.

Формула сведения поверхностного интеграла I рода к двойному интегралу по проекции поверхности интегрирования на одну из координатных плоскостей. Примеры.

Основные приложения: вычисление площади поверхности, массы и других механических характеристик поверхности (тонкой оболочки).

§11. *Поверхностные интегралы II рода: определение, физическая трактовка, основные свойства, вычисление. Формулы Стокса и Остроградского-Гаусса.*

Определение, физическая трактовка как потока вектора через ориентированную поверхность.

Понятие двусторонней и односторонней поверхности, ориентированной поверхности.

Основные свойства: линейность по подынтегральной функции; аддитивность по поверхности интегрирования; зависимость от ориентации поверхности; достаточные условия существования.

Различные формы записи поверхностного интеграла II рода.

Правило вычисления поверхностных интегралов II рода сведением к двойным интегралам по проекциям поверхности интегрирования на координатные плоскости. Примеры.

Формулы Стокса и Остроградского-Гаусса: запись формул, пояснение смысла, примеры применения.

*Тема 3. Элементы теории векторных полей*

§12. *Определение векторного поля. Векторные линии. Поток векторного поля через поверхность: определение, основные свойства, формулы для вычисления.*

Определение векторного поля, его задание и примеры.

Определение векторных линий, их уравнения и пример нахождения для плоского векторного поля.

Определение потока векторного поля $\vec{A}$ через ориентированную поверхность $(\sigma)$ в направлении ее нормали $\vec{n}$.

Основные свойства потока:

- зависимость потока от направления нормали к поверхности;
- смысл величины потока через замкнутую поверхность;
- формула для вычисления потока в случае, когда поверхность $(\sigma)$ задана уравнением $F(x,y,z)=0$.

Примеры вычисления потока.

§13. *Дивергенция и ротор векторного поля: определения, основные свойства, формулы для вычисления. Формула Остроградского-Гаусса в векторной форме.*

Определение дивергенции векторного поля в фиксированной точке *M*.

Основные свойства дивергенции:

- описание и смысл величины $div\vec{A}$;
- формула для вычисления $div\vec{A}$, вывод формулы;
- векторная запись и смысл формулы Остроградского - Гаусса;

– линейность дивергенции;

– дивергенция от произведения скалярного поля $U$ на векторное поле $\vec{A}$.

Примеры вычисления дивергенции и объяснение смысла ее значения.

Определение ротора векторного поля в заданной точке.

Основные свойства ротора:

– описание характеристики $rot\,\vec{A}$;

– линейность ротора;

– ротор от произведения скалярного поля $U$ на векторное поле $\vec{A}$;

– физический смысл $rot\,\vec{A}$ как вращательной характеристики поля $\vec{A}$.

Примеры вычисления ротора.

§14. *Векторный дифференциальный оператор Гамильтона. Дифференциальные векторные операции первого и второго порядков.*

Понятие о символьных операторах дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$.

Определение векторного дифференциального оператора Гамильтона (оператора «набла») и правила работы с ним.

Перечень векторных дифференциальных операций первого порядка и их запись с помощью оператора «набла»: $\vec{\nabla} U = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = div\,\vec{A}$, $\vec{\nabla} \times \vec{A} = rot\,\vec{A}$.

Определение пяти векторных дифференциальных операций второго порядка: $div\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U\right)$, $rot\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U\right)$, $div\left(rot\,\vec{A}\right)$, $rot\left(rot\,\vec{A}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(div\,\vec{A}\right)$, их запись с помощью оператора «набла» и результаты их выполнения.

Аналогия работы с оператором «набла» и операциями векторной алгебры.

§15. *Работа и циркуляция векторного поля: определения, основные свойства циркуляции. Формула Стокса в векторной форме.*

Определение работы векторного поля $\vec{A}$ на участке $M_1 M_2$ кривой $(l)$.

Определение циркуляции векторного поля $\vec{A}$ по замкнутому контуру $(l)$, на котором задано направление обхода.

Основные свойства циркуляции:

– зависимость циркуляции от направления на контуре;

– значение циркуляции в потенциальном векторном поле;

– связь циркуляции и ротора векторного поля с помощью формулы Стокса;

– определение ротора векторного поля через циркуляцию этого поля.

Вычисление циркуляции, пример.

§16. *Потенциальные, соленоидальные и гармонические векторные поля: определения и основные свойства. Нахождение потенциала потенциального векторного поля.*

Определение потенциального поля и его основные свойства:

- равенство нулю циркуляции по любому замкнутому контуру;
- признак потенциальности поля (необходимое и достаточное условие: $\operatorname{rot}\vec{A}=\vec{0}$);
- значение работы в потенциальном поле;
- нахождение потенциала, пример.

Определение соленоидального поля и его основные свойства:

- значение потока ($P=0$) через любую замкнутую поверхность;
- понятие о векторном потенциале векторного поля и его связь с соленоидальностью;
- представление о форме векторных линий соленоидального поля.

Определение гармонического поля и его основные свойства:

- потенциал гармонического поля удовлетворяет уравнению Лапласа: $\Delta U=0$;
- представление любого векторного поля в виде суммы потенциального поля и соленоидального поля.

## 7.2 Описание практической части модуля, формы контроля

В практической части модуля нужно овладеть ниже перечисленными умениями и навыками.
По дифференциальному исчислению ФНП:

- техникой вычисления частных производных ФНП, включая сложные и неявно заданные ФНП;
- понятием полного дифференциала ФНП и примерами его использования;
- исследованием функции двух переменных на локальные экстремумы и на наибольшее и наименьшее значения в замкнутой ограниченной области;
- понятиями градиента и производной по направлению, их вычислением и интерпретацией.

По интегральному исчислению ФНП:

- алгоритмами вычисления двойных интегралов в декартовых и в полярных координатах;
- алгоритмами вычисления тройных интегралов в декартовых, в цилиндрических и в сферических системах координат;
- алгоритмами вычисления криволинейных интегралов I рода и II рода в трехмерном и двумерном случаях;
- алгоритмом вычисления криволинейных интегралов II рода, не зависящих от формы линии интегрирования;
- алгоритмами вычисления поверхностных интегралов I и II рода;

– геометрическими приложениями интегралов от ФНП к вычислению площадей плоских фигур, объемов различных тел, длины дуги кривой (плоской или пространственной), площади поверхности;
– механическими приложениями интегралов к вычислению массы неоднородных тонких пластинок, объемных тел, линий и поверхностей, статических моментов, моментов инерции, координат центра масс тонких пластинок, объемных тел;
– физическим приложением криволинейного интеграла II рода к вычислению работы, совершаемой переменной силой на криволинейном перемещении;
– решением задачи об изменении порядка интегрирования в повторном интеграле;
– решением задачи о восстановлении функции нескольких переменных по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла II рода.

По теории векторных полей:

– вычислением и интерпретацией значений основных характеристик векторных полей: потока векторного поля через ориентированную поверхность, дивергенции и ротора векторного поля, циркуляции векторного поля по заданному контуру, на котором указано направление, потенциала потенциального векторного поля;
– навыками работы с векторным дифференциальным оператором «набла».

Для приобретения практических умений и навыков следует разбирать примеры, приводимые в учебниках и конспектах для иллюстрации теоретических положений, активно участвовать в аудиторных практических занятиях, использовать внешние решебники и практикумы по изучаемой теме. С целью создания настройки на регулярную самостоятельную работу, а также для реализации обратной связи в аудитории рекомендуется проводить в интерактивной форме самостоятельную работу по дифференцированию ФНП и простейшим задачам на приложения частных производных и полного дифференциала.

Основной формой обучения и контроля по практической части модуля является расчетно-графическая работа (РГР), включающая все прикладные задания по теме модуля, имеющие громоздкие решения. РГР должна выполняться в соответствии с Методической разработкой к ней и в режиме регулярных консультаций. При этом поощряется использование компьютерных средств поддержки учебного процесса (различных графопостроителей и/или прикладных математических пакетов). Интерактивную экспертизу выполненных решений эффективно поручать обучающимся (в режиме перекрёстной проверки работ). Заканчивается выполнение РГР защитой её фрагментов в аудитории. Примерный вариант РГР для очной формы обучения приводится ниже.

*Расчетно-графическая работа «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций нескольких переменных»*

*Задание* 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в замкнутой области *D*, ограниченной заданными линиями. Результаты решения вынести на область *D*, построенную в системе координат.

$$z = x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y - 5,\ D: x = -2,\ y = -1,\ x + y = 3.$$

*Задание* 2

Дано двумерное скалярное поле $U = U(x, y)$, точка $M_0(x_0; y_0)$ и вектор $\vec{s}$:

$$U = x^2 - 2y,\quad M_0(1;-1),\quad \vec{s} = 2\vec{i} - \vec{j}\,.$$

Требуется:

1) определить уравнения линий уровня и $\overrightarrow{grad}\,U$, описать смысл этих характеристик скалярного поля; построить несколько линий уровня в системе координат $xOy$;

2) в точке $M_0$ найти градиент скалярного поля $U$, производную $\frac{\partial U}{\partial s}$ по заданному направлению $\vec{s}$ и величину скорости наибольшего возрастания функции $U$;

3) выполнить построение вектора $\overrightarrow{grad}\,U(M_0)$ и линии уровня, проходящей через точку $M_0$, описать их взаимное расположение; построить вектор $\vec{s}$, сравнить его направление с направлением $\overrightarrow{grad}\,U(M_0)$ и пояснить знак значения $\frac{\partial U}{\partial s}$.

*Задание* 3

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx$.

*Задание* 4

Используя двойной интеграл, вычислить указанные величины.

4.1. Площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 2y$, $y^2 - 2y + \frac{1}{2}x = 0$;

4.2. Объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = z - 1$, $x^2 + y^2 = -3z + 7$;

4.3. Момент инерции относительно начала координат плоской фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 9$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$), если поверхностная плотность в точке с координатами ($x$; $y$) равна ординате этой точки.

*Задание* 5

Используя тройной интеграл, вычислить указанные величины.

5.1. Объем тела, ограниченного поверхностями $(az)^2 = x^2 + y^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 1$, $z \geq 0$;

5.2. Массу тела, ограниченного поверхностями $2x + z = 2a$, $x + z = a$, $y^2 = ax$, $y = 0$ ($y \geq 0$), если плотность в каждой его точке равна произведению абсциссы и ординаты этой точки.

*Задание* 6

Используя криволинейные интегралы, определить указанные величины.

6.1. Работу, производимую силой $\vec{F} = \{y; -y - x^2\}$ при перемещении точечной массы $m = 1$ вдоль дуги линии $y = 2x - x^2$, расположенной над осью $OX$ и пробегаемой по ходу часовой стрелки;

6.2 . Массу окружности $x^2 + y^2 = ax$, если линейная плотность материала в точке ($x$; $y$) равна расстоянию от этой точки до начала координат;

6.3. Функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу $dU = \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$.

*Задание* 7

Используя поверхностный интеграл первого рода, найти площадь части поверхности $z = 2 - \frac{x^2 + y^2}{2}$, расположенной над плоскостью $xOy$.

*Задание* 8

Решить следующие задачи для векторных полей.

8.1. Доказать, что векторное поле $\vec{F}$ потенциально, и найти его потенциал: $\vec{F} = (10x - 3yz)\vec{i} + (10y - 3xz)\vec{j} + (10z - 3xy)\vec{k}$;

8.2. Найти поток *П* векторного поля $\vec{F}$ через полную поверхность пирамиды, ограниченной плоскостью $\alpha$ и координатными плоскостями, в направлении внешней нормали к ее поверхности (непосредственно и по формуле Остроградского-Гаусса):

$$\vec{F}=(2x+3y)\,\vec{i}+(2y-3x)\,\vec{j}+(2z+3x)\,\vec{k}\,,\qquad \alpha:\quad 4x+y+2z=4;$$

8.3. Вычислить циркуляцию *Ц* векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру пересечения плоскости $\alpha$ с координатными плоскостями (непосредственно и по формуле Стокса):

$\vec{F}$ и $\alpha$ - те же, что и в задаче 8.2.

## 7.3 Список вопросов самопроверки по теоретической части модуля

*Сформулируйте определения следующих понятий или смысл названий*:

1) функция нескольких независимых переменных (ФНП);
2) линии уровня функции двух переменных;
3) поверхности уровня функции трех переменных;
4) область определения ФНП;
5) график функции двух переменных;
6) замкнутая область;
7) открытая область;
8) ограниченная область;
9) $\delta$ –окрестность точки $M_0(x_0;y_0\}$;
10) конечный предел функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0;y_0\}$;
11) непрерывная функция $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0;y_0\}$;
12) непрерывная ФНП в области *D*;
13) частное приращение ФНП;
14) полное приращение ФНП;
15) частная производная ФНП;
16) дифференцируемая ФНП в заданной точке;
17) полный дифференциал ФНП;
18) сложная ФНП;
19) полная производная сложной ФНП;
20) инвариантность формы полного дифференциала ФНП;
21) частные производные второго порядка ФНП;
22) смешанные частные производные высших порядков ФНП;
23) локальный максимум и локальный минимум ФНП;
24) локальные экстремумы ФНП;
25) критические точки ФНП;
26) стационарные точки ФНП;
27) компакт;
28) касательная плоскость к поверхности $F(x,y,z)=0$ в ее точке $M_0$;
29) направляющий вектор касательной к пространственной кривой $(l)$ в ее точке $M_0$;

30) вектор нормали к поверхности в ее точке $M_0$;
31) нормаль к поверхности;
32) особые точки поверхности;
33) скалярное поле некоторой величины;
34) производная ФНП по направлению $\vec{s}$;
35) градиент скалярного поля;
36) двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области $D$;
37) тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ по объему $V$;
38) криволинейный интеграл I рода от функции $f(x, y, z)$ по линии $(l)$;
39) криволинейный интеграл II рода;
40) поверхностный интеграл I рода;
41) поверхностный интеграл II рода;
42) векторное поле некоторой величины;
43) векторные линии векторного поля;
44) поток векторного поля через заданную поверхность;
45) дивергенция векторного поля;
46) ротор векторного поля;
47) циркуляция векторного поля;
48) потенциальное векторное поле;
49) соленоидальное векторное поле;
50) гармоническое векторное поле;
51) потенциал потенциального векторного поля;
52) оператор Гамильтона (оператор «набла»);
53) геометрическая трактовка двойного интеграла;
54) механическая трактовка двойного интеграла;
55) механическая трактовка тройного интеграла;
56) механическая трактовка криволинейного интеграла I рода;
57) физическая трактовка криволинейного интеграла II рода;
58) механическая трактовка поверхностного интеграла I рода;
59) физическая трактовка поверхностного интеграла II рода;
60) функциональный определитель Якоби.

*Запишите следующие формулы и поясните входящие в них обозначения*:

1) определение частных приращений ФНП;
2) определение частных производных ФНП;
3) определение полного приращения ФНП;
4) определение полного дифференциала ФНП;
5) связь полного дифференциала ФНП с ее полным приращением;
6) формулы для дифференцирования сложной ФНП;
7) формула для полной производной сложной ФНП;
8) формулы для вычисления частных производных функции, заданной неявно;
9) формула Тейлора второго порядка для функции двух переменных;

10) уравнение касательной к пространственной кривой $(l)$ в ее точке $M_0$;
11) уравнение касательной плоскости к поверхности в ее точке $M_0$;
12) уравнение нормали к поверхности;
13) уравнения поверхностей (линий) уровня скалярного поля;
14) формула для вычисления производной ФНП по заданному направлению;
15) определение градиента скалярного поля;
16) формула замены переменных в кратных интегралах;
17) формула для вычисления площади плоской фигуры с помощью двойного интеграла;
18) формула для вычисления объемов с помощью двойного интеграла;
19) формула для вычисления объемов с помощью тройного интеграла;
20) формула для вычисления длины дуги с помощью криволинейного интеграла I рода;
21) формула для вычисления площади поверхности с помощью поверхностного интеграла;
22) формула Грина;
23) формула Остроградского-Гаусса;
24) формула Стокса;
25) формула для вычисления площади плоской фигуры с помощью криволинейного интеграла II рода;
26) формула, определяющая поток векторного поля через поверхность;
27) формулы для определения и вычисления дивергенции векторного поля.

*Сформулируйте следующие теоремы, правила или свойства*:

1) правило вычисления частных производных ФНП;
2) геометрический смысл частных производных функции двух переменных;
3) свойство инвариантности формы полного дифференциала ФНП;
4) основное свойство смешанных частных производных ФНП;
5) необходимое условие локального экстремума ФНП;
6) достаточное условие локального экстремума функции двух переменных;
7) смысл производной ФНП по заданному направлению;
8) основные свойства градиента ФНП;
9) правило сведения двойного интеграла к повторному интегралу в декартовых координатах (в двух вариантах);
10) правило вычисления двойного интеграла в полярных координатах;
11) правило вычисления тройного интеграла в декартовых координатах;
12) правило вычисления тройного интеграла в цилиндрических координатах;
13) правило вычисления тройного интеграла в сферических координатах;
14) правило вычисления криволинейного интеграла I рода;
15) правило вычисления криволинейного интеграла II рода;
16) правило вычисления поверхностного интеграла I рода;
17) теорема о независимости криволинейного интеграла II рода от формы линии интегрирования;
18) алгоритм восстановления ФНП по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла II рода;
19) свойства двойного интеграла;

20) свойства тройного интеграла;
21) свойства криволинейного интеграла I рода;
22) свойства поверхностного интеграла I рода;
23) основные свойства криволинейного интеграла II рода;
24) основные свойства поверхностного интеграла II рода;
25) теорема о среднем значении подынтегральной функции:

$f(x,y)$ в области $D \subset \mathbb{R}^2$; $f(x,y,z)$ в области $V \subset \mathbb{R}^3$;

26) свойства потока векторного поля;
27) свойства дивергенции векторного поля;
28) свойства ротора векторного поля;
29) свойства циркуляции векторного поля;
30) свойства потенциальных векторных полей.

При ответах на вопросы самопроверки рекомендуется сформировать глоссарий терминов по теме модуля, который далее будет полезен при подготовке к промежуточной аттестации, а также при использовании теоретических фактов темы при изучении дисциплин естественнонаучного профиля.

# 8 Модуль 6. Числовые и степенные ряды. Ряды Фурье и интеграл Фурье

## 8.1 Описание теоретической части модуля

Тема «Ряды» относится к основным темам математических дисциплин для технических направлений профессиональной подготовки, так как в ней изучается математическая структура, которая является важнейшим инструментом исследования в математическом анализе и его приложениях, а также является основой для построения многих вычислительных алгоритмов.

С целью определения рамок изучения темы ниже приводится список параграфов темы, в котором после названия каждого параграфа даётся его подробное содержание. Параграф 13 помечен «звёздочкой», поскольку в нём рассматриваются обобщенные ряды Фурье (по любой ортогональной системе функций), что относится к углублённому изучению темы. Обучающимся рекомендуется составить свой краткий конспект по теоретической части темы, включающий формальную запись основных определений, свойств и теорем. Тема «Ряды» отличается большим количеством логических связей, поэтому с целью формирования навыка к полной и строгой обоснованности выводов и результатов рекомендуется обучающимся составлять логические схемы или ментальные карты, отражающие логические связи и переходы между различными теоретическими фактами темы.

§1. *Определение числового ряда, его частичная сумма, сходимость и расходимость. Сумма сходящегося ряда. Остаток ряда. Необходимый признак сходимости числовых рядов, его недостаточность. Основные свойства сходящихся рядов.*

Определение числового ряда, его общего члена, примеры.

Определение частичной суммы $S_n$ ряда.

Определение сходящегося ряда и его суммы $S$.

Определение расходящегося ряда.

Сходимость геометрического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$.

Определение остатка ряда $r_n$, формулировка задачи о приближенном вычислении суммы сходящегося ряда с заданной точностью $\varepsilon$: $S \approx S_n$, $|r_n| < \varepsilon$.

Формулировка и доказательство необходимого признака сходимости числовых рядов, его недостаточность на примере гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Правило работы с необходимым признаком, примеры.

Классификация основных достаточных признаков сходимости числовых рядов.

Основные свойства сходящихся рядов:

– связь сходимости ряда и его остатка;
– сумма сходящихся рядов;
– умножение всех членов ряда на число.

§2. *Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши.*

Определение знакоположительного ряда и знакопостоянного ряда.

Ограниченность последовательности частичных сумм сходящегося ряда.

Формулировка и доказательство признака сравнения в непредельной форме, примеры.

Формулировка и пояснение признака сравнения в предельной форме, примеры.

Формулировка и доказательство признака Даламбера в предельной форме, примеры.

Формулировка радикального признака Коши в предельной форме, примеры.

Формулировка и пояснение геометрической иллюстрацией интегрального признака Коши, примеры; исследование сходимости обобщенного гармонического ряда (ряда Дирихле).

§3. *Определение знакопеременного ряда. Признак абсолютной сходимости. Абсолютно и условно сходящиеся ряды, их основные свойства. Достаточный признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.*

Определение знакопеременного, в частности, знакочередующегося ряда, примеры.

Формулировка и доказательство признака абсолютной сходимости (если сходится ряд, составленный из модулей членов знакопеременного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд), примеры.

Определение абсолютно сходящегося ряда и условно (не абсолютно) сходящегося ряда, примеры.

Основные свойства абсолютно и условно сходящихся рядов:

- о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда;
- о перестановке членов условно сходящегося ряда;
- о перемножении двух абсолютно сходящихся рядов.

Формулировка и доказательство достаточного признака Лейбница сходимости знакочередующихся рядов, примеры. Следствия из признака Лейбница об оценке суммы и об оценке модуля остатка знакочередующегося ряда.

§4. *Функциональные ряды: общие определения. Понятие равномерной сходимости.*

Определение функционального ряда, примеры.

Определения точки сходимости и точки расходимости, области сходимости и области расходимости функционального ряда, примеры.

Определение равномерно сходящегося ряда, отличие равномерной сходимости от просто сходимости функционального ряда, понятия неравномерной сходимости, примеры.

Формулировка признака Вейерштрасса – достаточного признака равномерной сходимости, понятие мажорируемого ряда, мажорирующего ряда (мажоранты).

Основные свойства равномерно сходящихся рядов:

- непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда;
- возможность почленного интегрирования равномерно сходящегося ряда;
- возможность почленного дифференцирования при условии, что ряд из производных сходится равномерно.

§5. *Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал сходимости. Радиус сходимости. Основные свойства.*

Общий вид степенного ряда по степеням *x* и по степеням разности $(x-x_0)$, коэффициенты степенного ряда.

Формулировка и доказательство теоремы Абеля для ряда по степеням *x*. Следствие об интервале сходимости и промежутках расходимости степенного ряда. Определение радиуса сходимости *R*, примеры.

Схема области сходимости и области расходимости степенного ряда по степеням $(x-x_0)$, примеры.

Доказательство равномерной сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в промежутке $x \in [-\omega; \omega]$, где $\omega < R$, $R$ – радиус интервала сходимости.

Свойства степенных рядов, вытекающие из их равномерной сходимости:

- о непрерывности суммы степенного ряда;
- о возможности почленно интегрировать и дифференцировать степенной ряд.

§6. *Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена.*

Определение ряда Тейлора и ряда Маклорена для функции $f(x)$.

Разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора в точке $x = x_0$; определение остатка ряда в форме Лагранжа, необходимые и достаточные условия; примеры разложения.

Единственность представления функции в виде степенного ряда в окрестности точки $x_0$.

§7. *Стандартные разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций.*

Вывод разложений в ряд Маклорена функций $e^x$, $\sin x$, $\cos x$ по определению разложения $f(x)$ в степенной ряд с исследованием остатка в форме Лагранжа и с вычислением радиуса сходимости.

Биномиальное разложение для функции $(1+x)^m$, его частные случаи при $m=-1$, $m=1/2$; примеры.

Вывод разложений в ряд Маклорена функций $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$ с использованием разложения для функции $1/(1+x)$ и свойства об интегрировании степенных рядов. Пересчет радиуса сходимости.

Применение стандартных разложений элементарных функций для получения разложений в ряд Тейлора других функций.

§8. *Применение степенных рядов в приближенных вычислениях. Приближенное вычисление суммы числового ряда. Оценки остатков рядов.*

Постановка и решение задачи о приближенном вычислении с заданной точностью $\varepsilon$ суммы $S$ сходящегося числового ряда.

Оценка остатка знакочередующегося ряда, удовлетворяющего достаточному признаку сходимости Лейбница.

Некоторые оценки остатков знакоположительных рядов (например, сходящегося ряда по интегральному признаку Коши).

Примеры применения разложения функции в степенной ряд для приближенного вычисления значений функции и определенных интегралов.

§9. *Гармоники, тригонометрические ряды. Ряд Фурье для $2\pi$ - периодической функции.*

Гармоники, основные свойства гармоник.

Тригонометрический ряд, условия для его равномерной сходимости, формулы Фурье для вычисления коэффициентов ряда через его сумму.

Определение тригонометрического ряда Фурье для периодической функции $f(x)$ с периодом $T = 2\pi$.

Достаточные условия Дирихле для разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье.

Сумма ряда Фурье. Примеры.

§10. *Ряды Фурье для четных или нечетных функций, для функций с произвольным периодом $T = 2l$. Ряд Фурье для функции, заданной на конечном промежутке.*

Структура ряда Фурье функции $f(x)$ и формулы для его коэффициентов в случаях, когда $f(x)$ является четной или нечетной функцией на промежутке $x \in (-\pi;\pi)$.

Вид ряда Фурье функции $f(x)$ и формулы для его коэффициентов в случае, когда $f(x)$ является периодической функцией с произвольным периодом $T = 2l$; влияние четности или нечетности $f(x)$, $x \in (-l;\, l)$; примеры.

Представление рядом Фурье функции $f(x)$, заданной на конечном промежутке $x \in (a;b)$; четное или нечетное продолжение $f(x),\ x \in \left(0;\ l\right)$; примеры.

§11. *Ряд Фурье в комплексной форме. Амплитудный и фазовый дискретные спектры периодической функции.*

Формулы Эйлера. Вывод комплексной формы ряда Фурье периодической функции $f(x)$, $T = 2\pi$ и формул для его коэффициентов; обобщение на случай периодической $f(x)$, $T = 2l$.

Переход от комплексной формы ряда Фурье к его действительной форме. Примеры.

Определения дискретных спектров частот $\omega_n$, амплитуд $A_n$ и фаз $\varphi_n$ периодической функции, представленной тригонометрическим рядом Фурье в действительной форме или в комплексной форме.

Графики зависимостей амплитудного $A_n = A\left(\omega_n\right)$ дискретного спектра от частот $\omega_n$; влияние длины основного периода $T = 2l$ функции $f(x)$ на график $A_n$; примеры.

§12. *Интеграл Фурье. Преобразования Фурье. Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики непериодической функции.*

Представление интегралом Фурье непериодической функции $f(x),\ x \in \left(-\infty;\ +\infty\right)$: формулы представления, пояснения или вывод этих формул, аналогия с формулами представления периодической функции $f(x),\ x \in \left(-l;\ l\right)$, $T = 2l$ тригонометрическим рядом Фурье, примеры.

Действительная и комплексная формы интеграла Фурье, его сходимость, достаточные условия для представления функции $f(x)$ интегралом Фурье.

Определения амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик непериодической функции $f(x)$, т.е. непрерывных спектров амплитуд $A(\omega)$ и фаз $\varphi(\omega)$ в зависимости от частот $\omega \in [0;+\infty)$ или $\omega \in (-\infty;+\infty)$.

Определения интегральных преобразований Фурье функции $f(x),\ x \in (-\infty;\ +\infty)$: косинус-преобразования, синус-преобразования, комплексного преобразования Фурье (спектральной функции); примеры.

§13*. *Ортогональные системы функций. Обобщенные ряды Фурье по ортогональной системе функций. Среднеквадратическая сходимость.*

Определения следующих понятий:

- ортогональность двух функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, заданных на отрезке $x \in [a;b]$;
- ортогональность системы функций $\{\varphi_n(x)\}$, заданных на отрезке $x \in [a;b]$;
- норма функции $\varphi(x)$, $x \in [a;b]$;
- ортонормированная система функций $\{\varphi_n(x)\}$, $x \in [a;b]$.

Примеры ортогональных (ортонормированных) систем функций.

Определение обобщенного ряда Фурье по произвольной ортогональной системе функций $\{\varphi_n(x)\}$, $x \in [a;b]$; формулы для вычисления коэффициентов ряда (в частности для случая ортонормированной системы); сходимость обобщенного ряда Фурье.

Определение среднеквадратической сходимости функционального ряда, ее отличие от поточечной сходимости и от равномерной сходимости.

Оптимальность представления функции рядом Фурье с точки зрения среднеквадратической сходимости ряда.

## 8.2 Описание практической части модуля, формы контроля

В результате изучения модуля нужно получить следующие практические навыки:

- записывать числовой ряд по его общему члену и составлять общий член ряда по его нескольким первым членам;
- исследовать сходимость знакоположительных и знакопеременных, в частности, знакочередующихся рядов с помощью необходимого признака сходимости и достаточных признаков, соответствующих типу ряда;
- определять промежуток сходимости степенного ряда, вычислять радиус его сходимости;
- разлагать функции в степенные ряды, используя стандартные разложения основных элементарных функций;

– вычислять приближенное значение суммы ряда с заданной точностью;

– применять степенные ряды к вычислению значений функций и определенных интегралов;

– понимать необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять функция $f(x)$ для того, чтобы её можно было представлять тригонометрическим рядом Фурье или интегралом Фурье;

– уметь конкретизировать вид ряда Фурье и формулы для его коэффициентов для $2\pi$-периодических и для $2l$-периодических функций, в том числе с учетом их свойства четности или нечетности;

– уметь представлять рядом Фурье функцию, заданную на конечном промежутке, выполняя её различные дополнения и периодические продолжения;

– уметь работать с рядами Фурье в действительной и в комплексной формах; в частности, уметь находить спектральные характеристики периодической функции;

– уметь представлять непериодическую функцию интегралом Фурье в действительной и в комплексной формах, находить непрерывный амплитудный спектр функции.

Для формирования практических умений и навыков следует разбирать примеры, приводимые в учебниках и конспектах как иллюстрации теоретических положений, разобрать примеры решения основных задач из практических пособий, активно участвовать в аудиторных практических занятиях и выполнять задания для самостоятельной работы, рекомендованные преподавателем. С целью вхождения в режим самостоятельной работы по теме, а также для реализации обратной связи в аудитории рекомендуется проводить в интерактивной форме самостоятельную работу по исследованию сходимости числовых рядов.

Основной формой контроля по практической части модуля является контрольная работа, примерный вариант которой приводится ниже.

*Контрольная работа*

*«Числовые и степенные ряды. Тригонометрические ряды Фурье и интеграл Фурье»*

0 вариант

*Задание* 1

Исследовать сходимость числовых рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4}{(2n)!}$;  2) $\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}+\frac{1}{8\sqrt{8}}+\ldots$;  3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^2+\sin\frac{1}{2^n}}$.

*Задание* 2

Найти область сходимости и область расходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(x+2)^n}{(n+2)\cdot\ln(n+2)}$.

*Задание* 3

Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0$:

1) $f(x)=\dfrac{1}{5+x}$, $x_0=2$; 2) $f(x)=\sqrt[4]{16+x}$, $x_0=0$.

*Задание* 4

1) Составить разложение функции $F(x)=\int\limits_0^x \operatorname{arctg} 2x\,dx$ в ряд Маклорена;

2) используя составленное разложение, вычислить значение $\int\limits_0^{0,1} \operatorname{arctg} 2x\,dx$ с точностью $\varepsilon=10^{-5}$.

*Задание* 5 (возможно выполнение в домашнем режиме)

Составить представление функции $f(x)$ разложением по простым гармоникам; подтвердить справедливость представления графически; найти амплитудный спектр функции $f(x)$:

1) $f(x)=x^2$, $x\in[-1;1)$, $T=2$; 2) $f(x)=\left[\begin{array}{l} e^x,\ x\in[0;1] \\ 0,\ x\notin[0;1] \end{array}\right.$

*Ответы к заданиям 0 варианта КР*

*«Числовые и степенные ряды. Элементы гармонического анализа»*

*Задание* 1

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+4}{(2n)!}$ сходится (по признаку Даламбера);

2) ряд $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{5\sqrt{5}}+\dfrac{1}{8\sqrt{8}}+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-1)\sqrt{3n-1}}$ сходится (по признаку сравнения);

3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{n^2+\sin\dfrac{1}{2^n}}$ сходится (по признаку абсолютной сходимости или по признаку Лейбница), сходимость абсолютная (по определению абсолютной сходимости).

*Задание* 2

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot(x+2)^n}{(n+2)\cdot\ln(n+2)}$ сходится абсолютно при $x\in(-3;-1)$, сходится условно при $x=-1$, расходится при $x\in(-\infty;-3]\cup(-1;+\infty)$.

*Задание* 3

1) $f(x)=\dfrac{1}{5+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{7^{n+1}}\left(x-2\right)^n$, $x\in(-5;9)$;

2) $f(x)=\sqrt[4]{16+x}=2+\dfrac{1}{32}x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(4n-5)!!!!}{2^{6n-1}\cdot n!}\cdot x^n$, $x\in(-16;16)$.

*Задание* 4

1) $F(x)=\int\limits_0^x \operatorname{arctg} 2x\,dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+2)}\cdot x^{2n+2}$, $x\in[-0,5;\ 0,5]$;

2) $\int\limits_0^{0,1}\operatorname{arctg} 2x\,dx=0,00993$, $\varepsilon=10^{-5}$.

*Задание* 5

1) представление периодической функции $f(x)$ рядом Фурье в действительной форме:

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\pi nx, \quad x \in [-1;\, 1), \quad T = 2\,;$$

дискретный амплитудный спектр функции $f(x)$: $A_n = A(\omega_n) = \frac{4}{\omega_n^2}$, $\omega_n = \pi n,\ n = 1, 2, 3, \dots$.

2) представление непериодической функции $f(x)$ интегралом Фурье в действительной форме:

$$\underset{x\in(-\infty;+\infty)}{f(x)} = \int_0^{\infty}\left(\left(\frac{1}{\pi(\omega^2+1)}(e\cos\omega + e\omega\sin\omega - 1)\right)\cos\omega x + \left(\frac{1}{\pi(\omega^2+1)}(-e\omega\cos\omega + e\sin\omega + \omega)\right)\sin\omega x\right)d\omega;$$

представление $f(x)$ интегралом Фурье в комплексной форме:

$$\underset{x\in(-\infty;+\infty)}{f(x)} = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{(1-i\omega)}-1}{1+\omega^2}\right)(1+i\omega)e^{i\omega x}d\omega\,;$$

непрерывный амплитудный спектр функции $f(x)$:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi(\omega^2+1)^{0,5}}\sqrt{1+e^2-2e\cos\omega}\,, \quad \omega \in [0;\ +\infty)$$ (по действительной форме интеграла Фурье);

$$\tilde{A}(\omega) = \frac{1}{2\pi(\omega^2+1)^{0,5}}\sqrt{1+e^2-2e\cos\omega}\,, \quad \omega \in (-\infty;\ +\infty)$$ (по комплексной форме интеграла Фурье).

*Критерии оценивания контрольной работы*

| | |
|---|---|
| Уровень «отлично» | Контрольная работа выполнена полностью, допущенные негрубые ошибки и недочеты исправлены в режиме доработок. Сформированы необходимые умения, успешно и систематически применяются навыки по решению основных практических задач, относящихся к указанной дисциплине. |
| Уровень «хорошо» | Контрольная работа выполнена полностью, допущенные негрубые ошибки и недочеты исправлены в режиме доработок, но выбор методов решения неуверенный и обоснования шагов в решениях недостаточны. Сформированы в целом успешные, но содержащее отдельные пробелы умения и навыки по решению основных практических задач, относящихся к указанной дисциплине. |
| Уровень «удовлетворительно» | В контрольной работе допущены грубые ошибки и (или) недочеты, исправленные после рецензии преподавателя. Студент владеет основными обязательными умениями по проверяемым темам. В целом успешное, но не систематическое применение навыков по решению основных практических задач, относящихся к указанной дисциплине. |
| Уровень «неудовлетворительно» | Контрольная работа не выполнена. Умения и навыки по решению основных практических задач, относящихся к указанной дисциплине, не сформированы на должном уровне. |

### 8.3 Список вопросов самопроверки по теоретической части модуля

*Сформулируйте определения следующих понятий или смысл названий*:

1) числовой ряд;
2) общий член ряда;
3) частичная сумма ряда;
4) сходящийся числовой ряд;
5) расходящийся числовой ряд;
6) сумма сходящегося ряда;
7) частичный остаток ряда;
8) геометрический ряд;
9) гармонический ряд;
10) обобщенный гармонический ряд, или ряд Дирихле;
11) знакоположительный (знакопостоянный) ряд;
12) знакопеременный ряд;
13) знакочередующийся ряд;
14) абсолютная сходимость ряда;
15) условная (неабсолютная) сходимость ряда;
16) функциональный ряд;
17) точка сходимости функционального ряда;
18) точка расходимости функционального ряда;
19) область сходимости функционального ряда;
20) область расходимости функционального ряда;
21) степенной ряд по степеням $x$;
22) степенной ряд по степеням разности $(x - x_0)$;
23) интервал сходимости и радиус сходимости степенного ряда;
24) мажорируемый функциональный ряд;
25) мажорирующий числовой ряд (мажоранта);
26) равномерная сходимость функционального ряда;
27) ряд Тейлора для функции $f(x)$;
28) ряд Маклорена для функции $f(x)$;
29) разложение функции $f(x)$ в степенной ряд в окрестности точки функции $x_0$;
30) простая гармоника, её частота, амплитуда и фаза;
31) тригонометрический ряд Фурье;

32) коэффициенты тригонометрического ряда и их связь с суммой ряда;
33) разложение периодической функции в тригонометрический ряд Фурье;
34) достаточные условия Дирихле для разложения функции в ряд Фурье;
35) сумма ряда Фурье;
36) особенности вида тригонометрического ряда Фурье и формулы для его коэффициентов в случае четной или нечетной функции;
37) разложение в тригонометрический ряд функции, заданной на конечном промежутке;
38) ряд Фурье в комплексной форме;
39) амплитудный и фазовый дискретные спектры периодической функции;
40) интеграл Фурье;
41) преобразования Фурье;
42) амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики непериодической функции.

*Сформулируйте признаки, свойства, запишите формулы и поясните входящие в них обозначения*:

1) необходимый признак сходимости числовых рядов;
2) признак сравнения в непредельной форме;
3) признак сравнения в предельной форме;
4) признак Даламбера (в предельной форме);
5) радикальный признак Коши (в предельной форме);
6) интегральный признак Коши;
7) признак абсолютной сходимости;
8) признак Лейбница;
9) признак равномерной сходимости функционального ряда (признак Вейерштрасса);
10) основные свойства сходящихся числовых рядов;
11) основные свойства абсолютно сходящихся числовых рядов;
12) основные свойства равномерно сходящихся функциональных рядов;
13) основные свойства степенных рядов;
14) теорема Абеля;
15) формула разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0$;
16) формула разложения функции $f(x)$ в ряд Маклорена;
17) формула Лагранжа для частичного остатка ряда Тейлора;
18) формула разложения в ряд Маклорена функции $e^x$;
19) формула разложения в ряд Маклорена функции $\sin x$;
20) формула разложения в ряд Маклорена функции $\cos x$;

21) формула разложения в ряд Маклорена функции $(1+x)^m$ (биномиальное разложение);
22) формула разложения в ряд Маклорена функции ln $(1+x)$;
23) формула разложения в ряд Маклорена функции arctg $x$;
24) формула оценки остатка знакочередующегося ряда, удовлетворяющего достаточному признаку сходимости Лейбница;
25) формула оценки остатка знакоположительного ряда, сходящегося по интегральному признаку Коши;
26) формулы тригонометрического ряда Фурье и его коэффициентов для $2\pi$ -периодической функции;
27) формулы тригонометрического ряда Фурье и его коэффициентов для $2l$ -периодической функции;
28) формулы тригонометрического ряда Фурье и его коэффициентов для $2l$ -периодической функции, обладающей свойством четности / нечетности;
29) формулы тригонометрического ряда Фурье и его коэффициентов в комплексной форме;
30) формулы для интеграла Фурье в действительной форме и в комплексной форме;
31) формулы для амплитудного спектра периодической функции;
32) формулы для амплитудного спектра непериодической функции.

При ответах на вопросы самопроверки рекомендуется сформировать глоссарий терминов и список формул по теме модуля, который далее будет полезен при подготовке к промежуточной аттестации, а также при использовании теоретических фактов темы при дальнейшем изучении дисциплин естественнонаучного профиля.

# 9 Итоговая аттестация по первой части дисциплине в форме «зачет»

Если обучающийся к моменту плановой рубежной аттестации набрал зачетное количество баллов согласно установленному диапазону в соответствии с Технологической картой по дисциплине, то он считается аттестованным.

| Сформированность части компетенции ОПК-1 | Оценка | Количество баллов | Критерии оценивания |
|---|---|---|---|
| Сформирована | Зачтено | 60 - 100 | Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону. |
| Не сформирована | Не зачтено | менее 60 | Зачетное количество согласно установленному диапазону баллов не набрано. |

Технологическая карта прохождения первой части дисциплины включает все контрольные точки текущего контроля и рубежной (итоговой) аттестации по дисциплине, составляется ведущим преподавателем дисциплины и выдаётся обучающимся в начале запланированного периода изучения дисциплины.

# 10 Итоговая аттестация по второй части дисциплине в форме «экзамен»

## 10.1 Список экзаменационных вопросов

*Модуль "Предел и непрерывность функций одной переменной"*

1. Определение числовой последовательности и ее предела. Сходящиеся и расходящиеся последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Основные свойства предела последовательности.

2. Теорема о связи сходящейся последовательности с ее пределом и бесконечно малой последовательностью. Теоремы о пределах последовательностей, полученных арифметическими операциями из сходящихся последовательностей.

3. Связь свойства ограниченности последовательности с ее пределом. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Определение числа *e*.

4. Определения предела функции по Гейне (на языке последовательностей) и по Коши (на языке окрестностей). Формальная запись на языке "$\varepsilon-\delta$" различных случаев предельного поведения функции.

5. Основные свойства функций, имеющих пределы: единственность предела, предел постоянной, переход к пределу в равенствах и неравенствах, предел зажатой функции, сохранение знака функцией, имеющей конечный предел. Предел функции в точке по заданному множеству. Односторонние пределы функции в точке, их связь с обычным пределом в этой точке.

6. Определение бесконечно малых функций в точке $x=a$, их основные свойства. Теорема о связи функции, имеющей конечный предел, с этим пределом и бесконечно малой функцией (признак существования конечного предела функции в точке $x=a$).

7. Бесконечно большие функции в точке $x=a$, их основные свойства. Понятие локально ограниченной / неограниченной функции в точке $x=a$, связь этих свойств функции с ее пределом в точке $x=a$.

8. Замечательные пределы. Примеры раскрытия неопределенностей с использованием замечательных пределов.

9. Качественное сравнение бесконечно малых функций: определения и примеры. Определение порядок малости одной бесконечно малой функции относительно другой.

10. Принцип замены эквивалентных бесконечно малых функций. Основные соотношения эквивалентностей бесконечно малых функций, примеры их использования.

11. Определение функции, непрерывной в точке $x_0$. Точки разрыва функции и их классификация. Основные свойства функций, непрерывных в точке $x_0$. Основные свойства функций, непрерывных на замкнутом промежутке.

*Модуль "Дифференциальное исчисление ФОП и его приложения"*

1. Определение производной, её механическая и геометрическая трактовки. Связь свойства непрерывности функции с её дифференцируемостью. Производные высших порядков.

2. Дифференциал функции: определение и основные свойства. Дифференциалы высших порядков. Основные приложения дифференциала: к приближенному вычислению значений функции и к нахождению погрешностей.

3. Определение гладкой функции. Теорема Ферма и теорема Ролля о гладких функциях.

4. Теорема Лагранжа, ее геометрическая трактовка. Формула Лагранжа для конечных приращений функции. Формулировка теоремы Коши, ее связь с теоремой Лагранжа.

5. Теорема Лопиталя и её обобщение на случай $x \to \infty$ и на случай отношения бесконечно больших функций. Правило Лопиталя: формулировка и примеры использования.

6. Определение локального экстремума функции. Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции и его недостаточность. Понятие острого экстремума. Определение точки, подозрительной на экстремум. Первое достаточное условие для локального экстремума дифференцируемой функции.

7. Определения выпуклой или вогнутой линии и точки её перегиба. Признак выпуклости или вогнутости графика дважды дифференцируемой функции. Необходимое условие для точки перегиба и его недостаточность. Определение точки, подозрительной на перегиб. Достаточное условие для точки перегиба.

8. Определение асимптоты линии. Нахождение вертикальных и наклонных (в частности, горизонтальных) асимптот графика функции.

9. Многочлен Тейлора для заданной функции. Формулы Тейлора и Маклорена. Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано и в форме Лагранжа.

*Модуль "Интегральное исчисление ФОП и его приложения"*

1. Первообразная функции и неопределенный интеграл: определения, основные свойства. Таблица неопределенных интегралов.

2. Метод замены переменной интегрирования. Описания простейших случаев линейной замены переменной интегрирования. Примеры.

3. Метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле. Основные типы интегралов, которые эффективно находить с помощью формулы интегрирования по частям. Примеры.

4. Рациональные дроби. Интегрирование простейших рациональных дробей. Алгоритм интегрирования любых рациональных дробей и пример его реализации.

5. Неопределенные интегралы от некоторых тригонометрических и от некоторых иррациональных функций. Примеры.

6. Определение определённого интеграла, его геометрическая и механическая трактовки, достаточные условия существования.

7. Теорема Барроу и следствия из нее.

8. Связь определенного интеграла с переменным верхним пределом и первообразной подынтегральной функции. Формула Ньютона-Лейбница.

9. Основные свойства определенного интеграла. Доказательство свойства линейности, свойства аддитивности, свойства о сравнении значений определенных интегралов от функций, связанных неравенством.

10. Основные свойства определенного интеграла. Вывод формул для оценки значения определенного интеграла.

11. Основные свойства определенного интеграла. Доказательство и геометрическая трактовка теоремы о среднем значении непрерывной функции на конечном промежутке.

12. Использование в определенных интегралах формулы интегрирования по частям и метода замены переменной интегрирования. Примеры.

13. Приложения определённого интеграла к вычислению площади плоской фигуры в декартовой системе координатах.

14. Приложения определённого интеграла к вычислению площади плоской фигуры в полярной системе координатах.

15. Вычисление объёмов тел вращения с помощью определенного интеграла.

16. Общая методика приложений определенного интеграла (в двух формах).

17. Определение и вычисление длины дуги плоской кривой (с помощью определенного интеграла). Дифференциал длины дуги.

18. Несобственные интегралы I рода: определения, геометрические трактовки, достаточные условия сходимости (расходимости).
19. Несобственные интегралы II рода: определения, геометрические трактовки, достаточные условия сходимости (расходимости).

20. Интегралы, зависящие от параметра: определение, примеры, основные свойства.

### 10.2 Критерии оценки ответов на экзаменационные вопросы

Ответы на экзаменационные вопросы оцениваются по критериям и шкале, которые представлены в таблице, расположенной ниже (10 - наибольшее количество баллов за устный ответ):

| Оценка | Баллы | Критерии оценки ответа на экзамене |
|---|---|---|
| ***Отлично*** | 9 - 10 | На все вопросы экзаменационного билета верно сформулированы теоретические факты (определения, теоремы, свойства), приведены их формульные записи и возможные трактовки (геометрические, физические, др.). Выполнено обоснование (логическое или геометрически иллюстративное доказательство) большинства сформулированных утверждений (теорем, свойств). В случае, когда несколько утверждений имеют однотипные способы доказательства, можно ограничиться обоснованием одного или части из этих утверждений. |
| ***Хорошо*** | от 7, но менее 9 | На все вопросы экзаменационного билета верно сформулированы теоретические факты (определения, теоремы, свойства), приведены их формульные записи и возможные трактовки (геометрические, физические, др.). В части формулировок возможны погрешности, не искажающие принципиально суть факта. Выполнено обоснование (логическое или геометрически иллюстративное доказательство) только некоторых из сформулированных утверждений (теорем, свойств), а для остальных приведены иллюстрации примерами, в том числе графическими. |
| ***Удовлетворительно*** | от 5, но менее 7 | На все вопросы экзаменационного билета верно сформулированы теоретические факты (определения, теоремы, свойства), приведены их формульные записи и возможные трактовки (геометрические, физические, др.). В части формулировок возможны погрешности, не искажающие принципиально суть факта. Обоснования теоретических фактов не приведены, но показана способность применять эти факты при решении практических заданий. |
| ***Неудовлетворительно*** | менее 5 | На большую часть вопросов экзаменационного билета верных ответов нет, то есть имеется хотя бы одно из следующих положений:<br>– теоретический факт не сформулирован и не записан формулой;<br>– формулировка или формульная запись факта имеют принципиальные ошибки, искажающие его суть;<br>– теоретический факт сформулирован и приведена его формульная запись, но не приведены никакие примеры, его иллюстрирующие, и, следовательно, нет оснований сделать вывод об освоенности этого факта. |

Баллы по дисциплине формируются в соответствии с Технологической картой прохождения второй части дисциплины, в которую включаются все контрольные точки текущего контроля и рубежной (итоговой) аттестации по дисциплине. Технологическая карта составляется ведущим преподавателем дисциплины и выдаётся обучающимся в начале запланированного периода изучения дисциплины.

## 11 Итоговая аттестация по третьей части дисциплине в форме «зачет с оценкой»

Если обучающийся к моменту плановой рубежной аттестации набрал зачетное количество баллов согласно установленному диапазону в соответствии с Технологической картой по части дисциплины, то он считается аттестованным.

| Сформированность части компетенции ОПК-1 | Оценка | Количество баллов | Критерии оценивания |
|---|---|---|---|
| Сформирована на отличном уровне | Зачтено «5» | 91 - 100 | Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону. |
| Сформирована на хорошем уровне | Зачтено «4» | 81 - 90 | Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону |
| Сформирована на удовлетворительном уровне | Зачтено «3» | 60 - 80 | Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону |
| Не сформирована | Не зачтено | менее 60 | Зачетное количество согласно установленному диапазону баллов не набрано. |

Баллы по дисциплине формируются в соответствии с Технологической картой прохождения третьей части дисциплины, в которую включаются все контрольные точки текущего контроля. Технологическая карта составляется ведущим преподавателем дисциплины и выдаётся обучающимся в начале запланированного периода изучения дисциплины.